КВАНТ

НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2003 №6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

В 2003 году 6000 экземпляров журнала «Квант» издаются за счет грантов Фонда некоммерческих программ «Династия» и Фонда «Евразия».

Нефтяная компания «Sakhalin Energy Investment Company Ltd.» выписывает сто экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

Бюро Квантум

Вызов Ван Роумена

Ю. СОЛОВЬЕВ

В НАЧАЛЕ ОКТЯБРЯ 1594 ГОДА КОРОЛЬ ФРАНЦИИ Генрих IV принимал в Фонтенбло посланника Республики Соединенных Нидерландов, которую по имени самой крупной ее провинции чаще всего называли Голландией. Возникшая в результате длительной и упорной борьбы против испанского владычества, республика была очень молода – ей шел всего второй десяток лет. Война с Испанией не прекращалась – голландское правительство настойчиво искало союзников. А во Франции только что погасли пожары многолетней междоусобицы, и Генрих, преодолев бешеное сопротивление оппозиции, поддерживаемой испанцами, стал французским королем.

Генрих не скрывал своего интереса к Голландии как к союзнику в борьбе с Испанией, но более всего его интересовали бурно развивающиеся голландская промышленность, торговля и мореплавание. Поэтому, прогуливаясь по парку в Фонтенбло, он внимательно слушал рассказ посланника о новых шелковых мануфактурах Роттердама, бумажных фабриках Утрехта, корабельных верфях Зандама.

– В Голландии сейчас много талантливых инженеров и ученых,– говорил посланник.– Математик и механик Симон Стевин разрабатывает новые системы шлюзов и плотин, по проектам математика Лудольфа Цейлена возводятся крепости, математик Андриен Ван Роумен славится своими головоломными вычислениями.

– Кстати, – продолжал посланник, – не так давно Ван Роумен сделал вызов математикам всего мира. Он разослал во многие страны письмо, в котором предлагает решить придуманную им задачу. Но пока это никому не удалось.

– Победителем непременно будет француз,– засмеялся король.

– Ваше Величество, – заметил посланник,– я привез это письмо, но, по-видимому, Франция не имеет выдающихся математиков, поскольку Ван Роумен среди тех, кому он адресовал свой вызов, не упомянул ни одного француза.

– И все же у меня есть математик, и весьма выдающийся, – ответил Генрих. – Позовите Виета.

Так в этот осенний день столкнулись судьбы двух очень непохожих людей.

Андриен Ван Роумен – родился в 1561 году в городе Лувене в Испанских Нидерландах (ныне Бельгия). Изучал медицину и математику в Лувенском университете. В Лувене же получил степень доктора. Преподавал математику в Лейдене и Вюрцбурге. Занимался исследованиями по геометрии и тригонометрии, а также практическими вопросами астрономии и навигации. Получил ряд частных результатов о разложении функций $\sin nx$ и $\cos nx$ по степеням $\sin x$ и $\cos x$, определил значение числа π с семнадцатью десятичными знаками, т.е. с наивысшей точностью для Европы того времени. При жизни Ван Роумен был очень знаменит в Голландии и Германии, но со временем его работы утратили свое значение, и сейчас упоминания о нем можно разыскать лишь в самых толстых энциклопедиях.

Франсуа Виет – родился в 1540 году в городе Фонтене. С 1559 года занимался адвокатской деятельностью, серьезно интересуясь при этом математикой и астрономией. В 1571 году переехал в Париж, где продолжил адвокатскую деятельность и завязал знакомства с парижскими математиками. В 1573 году стал советником парламента в Бретани, затем частным советником короля Генриха III. В 1580 году получил должность королевского докладчика по ходатайствам. В последние годы правления Генриха III занимался расшифровкой переписки между противниками короля и испанцами. Нашел ключ к сложному шифру, который использовался испанским королем Филиппом II и его генералами. Филипп II, узнав из перехваченных французских депеш, что его секретную корреспонденцию читают при французском дворе, в гневе принес жалобу папе римскому, указывая, что расшифровка явно проводилась с помощью колдовства и черной магии. После убийства Генриха III в августе 1589 года перешел на службу к Генриху Наваррскому, будущему французскому королю Генриху IV. Автор большого числа работ по алгебре, геометрии, тригонометрии, астрономии. Установил зависимость между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения, нашел разложения функций $\sin nx$ и $\cos nx$ по степеням $\sin x$ и $\cos x$, создал современную алгебраическую символику. Работы Виета, написанные тяжелым, усложненным языком, остались непонятыми его современниками и лишь спустя почти полвека после его смерти оказали огромное влияние на развитие алгебры и геометрии.

Но вернемся в Фонтенбло. Когда появился Виет, посланник достал письмо Ван Роумена. В нем предлагалось решить уравнение

$$\begin{gathered}45x-3795x^3+95634x^5-1138500x^7+\\+7811375x^9-34512075x^{11}+\\+105306075x^{13}-232676280x^{15}+\\+384942375x^{17}-488494125x^{19}+\\+483841800x^{21}-378658800x^{23}+\\+236030652x^{25}-117679100x^{27}+\\+46955700x^{29}-14945040x^{31}+\\+3764565x^{33}-740259x^{35}+111150x^{37}-12300x^{39}+\\+945x^{41}-45x^{43}+x^{45}=a,\end{gathered}$$

Опубликовано в «Кванте» №6 за 1986 год.

в частности, при

$$a = \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}}.$$

Для облегчения задачи Ван Роумен сообщал ответы, которые получаются при двух других значениях a (записываемых еще более громоздко).

Виет прочел письмо и сразу же написал решение. Посланник сказал, что в резиденции у него имеется запечатанный конверт с решением самого Ван Роумена. В присутствии нотариуса он вскроет его и завтра ответит, прав ли Виет.

На следующий день голландец подтвердил, что решение Виета верно, а Виет, в свою очередь, прислал еще двадцать два других решения, не известных Ван Роумену. Кроме того, Виет указал на ошибку в условии задачи (сделанную либо переписчиками, либо самим Ван Роуменом).

Попробуем разобраться, как удалось Виету необыкновенно быстро решить столь чудовищное на первый взгляд уравнение. Обратимся для этого к некоторым его математическим работам.

Главными тригонометрическими результатами, полученными Виетом, являются выражения для синусов и косинусов кратных дуг. Виет записывает эти выражения в форме правила, указывающего, как чисто механически можно получить их. Виет пользуется следующей таблицей:

1	1	1	1	1	1	…
1	2	3	4	5	6	…
1	3	6	10	15	21	…
1	4	10	20	35	56	…
1	5	15	35	70	126	…
1	6	21	56	126	252	…
1	7	28	84	210	462	…
…						

Каждое число здесь получается посредством сложения чисел, стоящих перед ним и над ним. Стоит отметить, что Виет выражает не $\sin nx$ и $\cos nx$ через $\sin x$ и $\cos x$, как это делаем мы, а $2\sin nx$ и $2\cos nx$ через $2\sin x$ и $2\cos x$. Если в образованных таким образом выражениях рассматривать величины $2\sin nx$ или $2\cos nx$ как известные, то мы получим уравнения n-й степени относительно неизвестных $2\sin x$ и $2\cos x$.

Первоначальная цель, ради которой Виет выводил

Юрий Петрович Соловьев
(1944 – 2003)

11 сентября 2003 года на 59-м году жизни скоропостижно скончался член редакционной коллегии нашего журнала, профессор механико-математического факультета МГУ Юрий Петрович Соловьев – математик чрезвычайно широкого научного диапазона, ученый с мировым именем, выдающийся педагог и популяризатор науки, просветитель в самом высоком смысле этого слова.

С 1981 по 1994 год Юрий Петрович был заместителем главного редактора журнала «Квант», во многом определявшим содержание математической части журнала. Человек необыкновенной гуманитарной культуры, знаток истории науки, истории нашей страны, истории религии, владевший многими (в том числе древними) языками, Юрий Петрович обладал также редкостным писательским даром. Его увлекательнейшие статьи по математике и истории науки, опубликованные в журнале «Квант», являются блестящими образцами научно-популярной литературы.

Юрий Петрович был очень добрым, отзывчивым и поразительно скромным человеком. Он всегда был готов прийти на помощь в трудных жизненных ситуациях. В то же время он умел быть жестким и бескомпромиссным в отстаивании своей точки зрения, никогда не шел на сделки с совестью.

Все, кому посчастливилось знать Юрия Петровича, всегда будут с благодарностью вспоминать этого светлого и благородного человека.

Редакционная коллегия, редакционный совет,
редакция журнала «Квант»

формулы синусов кратных дуг, заключалась в вычислении синусов дуг через синусы малых дуг, т.е. в составлении таблицы синусов. Затем эти формулы нашли применение в алгебре и геометрии.

В частности, геометрическую задачу о трисекции угла α Виет связал с уравнением

$$3x - x^3 = a,$$

которому удовлетворяют значения

$$a = 2\sin\alpha, \quad x = 2\sin(\alpha/3).$$

Два положительных решения этого уравнения Виет трактует как хорды, отвечающие дугам $2\alpha/3$ и $(360^\circ - 2\alpha)/3$. Отрицательный корень он, по обыкновению своего времени, вообще не принимает во внимание.

Точно так же задачу о делении угла на пять равных частей Виет связывает с уравнением

$$5x - 5x^3 + x^5 = a,$$

которому удовлетворяют значения

$$a = 2\sin\alpha, \quad x = 2\sin(\alpha/5).$$

Из сказанного ясно, в какой степени был подготовлен Виет, чтобы мгновенно решить задачу Ван Роумена. Он сразу же увидел, что предложенное значение a является длиной стороны правильного пятнадцатиугольника, вписанного в единичный круг (проверьте это!), или, что то же самое, хордой, отвечающей дуге 24°. Коэффициенты при первом и предпоследнем членах левой части позволили ему предположить, что левая часть есть не что иное, как выражение $2\sin 45\alpha$ через $2\sin\alpha$. Но поскольку $a = 2\sin 12^\circ$, то $\alpha = 12^\circ/45 = 4^\circ/15$ и, значит,

$$x = 2\sin\left(4^\circ/15\right).$$

Именно это решение и передал Виет голландскому посланнику.

После аудиенции Виет проверил свое предположение. Однако, проделав необходимые вычисления, он обнаружил, что левая часть предложенного уравнения не совпадает с разложением $2\sin 45\alpha$ по степеням $2\sin\alpha$.

Наверное, в этот момент он чувствовал себя не очень уютно, скорее всего, просто скверно.

Что произошло? Может быть, это всего лишь ошибка в весьма утомительных вычислениях? Видимо, именно тогда Виет и сумел найти другой – геометрический – способ выразить $2\sin 45\alpha$ через $2\sin\alpha$: для того чтобы разделить дугу на 45 частей, нужно разделить ее сначала на пять частей, затем каждую часть на три и снова на три. Другими словами, левую часть уравнения Ван Роумена можно получить из системы

$$\begin{cases} 3z - z^3 = a, \\ 3y - y^3 = z, \\ 5x - 5x^3 + x^5 = y. \end{cases}$$

Лишь проанализировав те ответы, которые сообщал Ван Роумен для двух других значений a, Виет убедился, что речь действительно идет о делении дуги на сорок пять частей, и смело исправил ошибку в условии.

Но Виет не ограничился этим решением. Двадцать два других решения, сообщенных им на следующий день, имели вид

$$2\sin\frac{360^\circ\cdot k + 12^\circ}{45} = 2\sin\frac{120^\circ\cdot k + 4^\circ}{15}, \quad k = 1, 2, \ldots, 22.$$

Таким образом, Виету удалось найти все положительные корни (напомним, что только они считались решениями в его время).

Здесь можно было бы поставить точку, однако математическое соревнование между Виетом и Ван Роуменом на этом не кончилось. Спустя короткое время Виет предложил Роумену построить циркулем и линейкой окружность, касающуюся трех данных окружностей (задача Аполлония). Вскоре Виет указал изящное геометрическое построение, выполнимое только циркулем и линейкой.

Рассказывают, что, потерпев второе поражение, Ван Роумен стал ревностным почитателем Виета и даже приезжал к нему учиться.

Примечание. Формулы для $\cos nx$ и $\sin nx$ вы можете получить с помощью таблицы, использованной Виетом.

Запишите таблицу в виде треугольника – он называется треугольником Паскаля:

$$\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}$$

Напишите n-ю строку треугольника Паскаля. (Кстати, для того чтобы найти n-ю строку, не нужно считать строки: в n-й строке на втором месте стоит n.) Припишите к числам из этой строки последовательно $\cos^n x$, $\cos^{n-1} x \sin x$, $\cos^{n-2} x \sin^2 x, \ldots, \sin^n x$. Подчеркните в получившейся цепочке выражения, стоящие на четных местах: втором, четвертом и т.д. Выпишите неподчеркнутые выражения и подчеркнутые выражения в две отдельные строчки. В каждой из строчек поставьте перед вторым выражением знак минус, перед третьим плюс, перед четвертым минус и т.д. Все готово – в верхней строчке вы написали выражение для $\cos nx$, в нижней – для $\sin nx$.

Примеры. При $n = 2$ строка треугольника Паскаля имеет вид 1, 2, 1. Пишем:

$$\cos^2 x \quad 2\cos x\sin x \quad \sin^2 x.$$

Отсюда получаем

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$\sin 2x = 2\cos x \sin x.$$

При $n = 3$ пишем:

$$\cos^3 x \quad 3\cos^2 x\sin x \quad 3\cos x\sin^2 x \quad \sin^3 x.$$

Отсюда

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x,$$
$$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x.$$

Поле мгновенных скоростей твердого тела

С.КРОТОВ

Как известно, твердым телом в механике называют систему, при любом движении которой изменением расстояния между произвольной парой ее точек (областей физически малых размеров) можно пренебречь. Обычно твердое тело представляет собой либо дискретный набор материальных точек, либо, в общем случае, тело с непрерывно распределенной массой. Поскольку речь идет о неизменном во времени взаимном расположении частей системы, более естественным было бы называть такое тело недеформируемым. Тем не менее, будем пользоваться устоявшейся терминологией.

Напомним, что под движением точки обычно понимают изменение с течением времени ее положения в пространстве. И важнейшей физической величиной, характеризующей быстроту изменения точкой своего положения, является вектор мгновенной скорости точки. В случае твердого тела таких точек очень много, и поэтому при описании движения твердого тела приходится в каждый момент времени иметь дело с огромным числом скоростей его точек. Будем называть интересующее нас в каждый момент времени множество скоростей точек твердого тела *полем мгновенных скоростей твердого тела.* Это поле жестко связано с самим телом (иногда даже его называют «вмороженным» в твердое тело), и в единственном случае, когда скорости всех точек равны и не изменяются со временем, поле не зависит от времени.

Характеризуя движение твердого тела в целом, принято выделять *поступательное*, *вращательное* (которое бывает и просто вращательным, и поступательно-вращательным, или винтовым) и *плоскопараллельное* (которое является «плоским» вариантом первых двух) движения.

Поступательным движением твердого тела называют такое его движение, при котором твердое тело не меняет ориентацию в пространстве. Очевидно, что при этом каждая принадлежащая твердому телу прямая остается все время параллельной себе, а все его точки описывают одинаковые (с точностью до соответствующего параллельного переноса) траектории.

Вращательным движением твердого тела называют такое его движение, при котором твердое тело меняет ориентацию в пространстве. Это означает, что найдется хотя бы одна прямая, жестко связанная с твердым телом, которая со временем поворачивается (не остается параллельной себе).

Плоскопараллельным называют такое движение твердого тела, при котором траектории всех точек твердого тела являются плоскими кривыми, расположенными в параллельных плоскостях. Понятно, что при таком движении твердое тело можно представить в виде совокупности параллельных слоев (стопки участков неподвижных параллельных плоскостей), каждый из которых с течением времени не выходит за пределы своей плоскости. При этом с произвольной точкой одного слоя с той же скоростью движется проходящий через нее перпендикулярно собственному слою и пронизывающий остальные слои целый «отрезок» твердого тела. Все точки этого отрезка описывают идентичные траектории, образуя пространственную ленту. Для описания движения всего твердого тела тогда достаточно рассмотреть плоское движение только одного слоя. Рассказывая о вращательном движении твердого тела, авторы учебников и учебных пособий обычно уделяют основное внимание именно этому частному случаю – плоскопараллельному движению твердого тела.

Наше дальнейшее рассмотрение будет связано с описанием поля мгновенных скоростей для различных видов движения твердого тела. Идея, которая была положена в основу изложения, состоит в том, что *для однозначного определения в каждый момент времени поля мгновенных скоростей твердого тела достаточно знать мгновенные скорости трех его точек, не лежащих на одной прямой.* Действительно, известно, что положение твердого тела (а значит, и любой его точки) в пространстве задается однозначно, если известно положение трех его произвольных точек, не лежащих на одной прямой. Поэтому и движение всех точек твердого тела можно однозначно задать, если известно, как движутся лишь три его точки, не лежащие на одной прямой. (Более строгое доказательство читателю предлагается провести самостоятельно – см. далее задание 8.) Поскольку поле мгновенных скоростей твердого тела представляет собой мгновенный пространственный «портрет» скоростей всех точек твердого тела, то и само поле мгновенных скоростей будет однозначно определяться скоростями трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой.

Рассмотрим для начала произвольную пару точек твердого тела A и B, положение которых в пространстве в каждый момент времени t задается радиусами-векторами $\vec{r}_A(t)$ и $\vec{r}_B(t)$ (рис.1). Условию постоянства во времени расстояния между точками A и B отвечает уравнение

$$\left(\vec{r}_A(t)-\vec{r}_B(t)\right)^2=\text{const}\,.$$

Продифференцировав его по времени, получим для

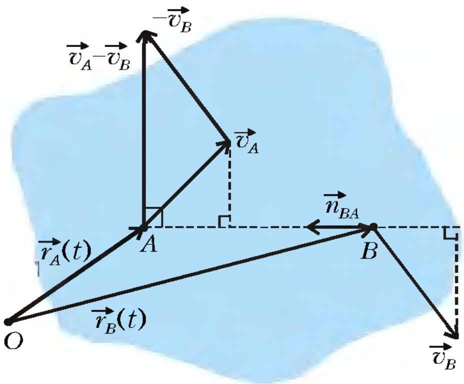


Рис. 1

каждого момента времени соотношение в виде равного нулю скалярного произведения:

$$(\vec{v}_A - \vec{v}_B)\cdot(\vec{r}_A - \vec{r}_B) = 0\,,$$

где $\vec{v}_A$ – вектор мгновенной скорости точки A, $\vec{v}_B$ – вектор мгновенной скорости точки B (явную зависимость всех величин от времени мы в последующих выражениях будем опускать).

Физический смысл последнего равенства становится особенно ясным, если это равенство сформулировать в виде теоремы.

Основная теорема кинематики твердого тела. *Относительная скорость концов отрезка, соединяющего пару точек твердого тела, всегда перпендикулярна самому отрезку.*

(Если окажется, что $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, то , как известно, 0-вектор перпендикулярен любому направлению.)

Основную теорему кинематики иногда формулируют по-другому. Перепишем наше скалярное произведение в виде

$$(\vec{v}_A - \vec{v}_B)\cdot\left(\frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{\left|\vec{r}_A - \vec{r}_B\right|}\right) = 0\,,$$

где $\left|\vec{r}_A - \vec{r}_B\right|$ – расстояние между точками A и B. Введем безразмерный вектор единичной длины направления прямой AB:

$$\vec{n}_{BA} = \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{\left|\vec{r}_A - \vec{r}_B\right|}\,.$$

Тогда математическое выражение основной теоремы кинематики твердого тела будет выглядеть так:

$$\vec{v}_A \cdot \vec{n}_{BA} = \vec{v}_B \cdot \vec{n}_{BA}\,.$$

Словами это можно сформулировать следующим образом:

Проекции скоростей концов соединяющего пару точек твердого тела отрезка на его направление всегда равны.

Из основной теоремы вытекает несколько следствий.

Следствие 1. Скорости точек твердого тела, лежащих на любой прямой, проходящей через его произвольную точку A перпендикулярно вектору $\vec{v}_A$, перпендикулярны этой прямой.

Следствие 2. Если некоторая точка O твердого тела покоится, то скорость $\vec{v}_A$ другой его точки A перпендикулярна отрезку OA, а траектории всех точек отрезка лежат на концентрических сферах (или, в простейшем случае, на окружностях) с центрами в точке O.

Следствие 3. Если некоторая точка O твердого тела покоится, а для двух других его точек A и B выполняется векторное соотношение

$$\overrightarrow{OA} = k\,\overrightarrow{OB}\,,$$

где k – любое действительное число (это математически отражает тот факт, что точки O, A и B лежат на одной прямой), то в любой момент времени между скоростями $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ точек A и B выполняется соотношение

$$\vec{v}_A = k\vec{v}_B\,.$$

Иначе говоря, мгновенные скорости всех точек жестко связанной с твердым телом прямой, одна из точек которой покоится, лежат на параллельных прямых.

Следствие 4. Если две точки твердого тела A и B покоятся, то и любая точка твердого тела, лежащая на прямой AB, также покоится. Действительно, в силу следствия 2 любая третья точка C прямой AB имеет скорость $\vec{v}_C$, перпендикулярную прямой AB, поэтому в последующие моменты времени, с одной стороны, расстояния AB, BC и AC остаются неизменными, а, с другой стороны, три точки A, B и C оказываются вершинами треугольника ABC (точка C «уйдет» с прямой AB), сумма длин двух сторон которого равна длине третьей, что противоречит основному неравенству треугольника. Поэтому точка C покоится вместе с точками A и B.

Следствие 5. Любая прямая, жестко связанная с твердым телом, остается при его движении прямой и движется как целое.

Для упрощения понимания дальнейшего текста статьи рекомендуем самостоятельно выполнить следующие задания.

1) Верно ли, что механическая система, при движении которой любая прямая, проходящая через точки системы, остается прямой, будет твердым телом?

2) Докажите, что если скорости двух точек A и B твердого тела равны, то все точки твердого тела, лежащие на прямой AB, имеют такую же скорость.

3) Если между скоростями $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ двух точек твердого тела A и B выполняется соотношение $\vec{v}_A = k\,\vec{v}_B$, где k – любое действительное число не равное 1, то на прямой AB всегда найдется точка O, скорость которой $\vec{v}_O$ равна нулю. Докажите это.

4) Покажите, что, зная скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ двух точек твердого тела A и B, можно определить скорость любой третьей точки твердого тела, лежащей на прямой AB.

5) Даны скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ двух точек твердого тела A и B. Докажите, что концы скоростей всех точек прямой AB лежат на прямой, проходящей через концы векторов скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$.

6) Даны векторы скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ двух точек твердого тела A и B: а) оба вектора $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ перпендикулярны прямой AB и образуют угол α между собой; б) общий случай. Чему равна минимальная величина скорости точек прямой AB?

7) При плоскопараллельном движении твердого тела даны скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ двух его точек A и B, причем $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$. Найдите точки твердого тела, скорости которых равны нулю.

8) Покажите, что, зная скорости $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_C$ трех точек твердого тела A, B и C, не лежащих на одной прямой, можно определить скорость любой точки твердого тела, а значит, и все его поле мгновенных скоростей.

Напомним вкратце основные понятия, касающиеся простейшего случая вращательного движения твердого тела – вращения относительно неподвижной и жестко связанной с твердым телом оси. Рассмотрим произвольную точку твердого тела A, не лежащую на оси вращения O_1O_2, и выберем на оси вращения точку O_3 такую, что $AO_3 \perp O_1O_2$ (очевидно, длина отрезка AO_3

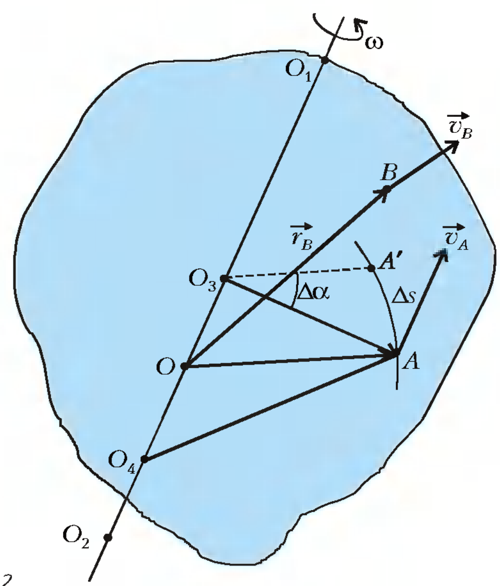


Рис.2

есть расстояние от точки A до оси вращения), и еще одну произвольную точку оси O_4 (рис.2). Поскольку точки O_3 и O_4 неподвижны, а расстояния AO_3 и AO_4 не меняются, вектор $\vec{v}_A$ скорости точки A будет (по основной теореме кинематики твердого тела) перпендикулярен как прямой AO_3, так и прямой AO_4, а значит (по теореме стереометрии о трех перпендикулярах), и любой прямой, лежащей в плоскости AO_3O_4, в частности и самой оси вращения.

Итак, в нашем случае при вращении твердого тела плоскость треугольника AO_3O_4 будет поворачиваться как целое, а точка A будет двигаться по окружности радиусом AO_3 с центром на оси вращения в точке O_3. Если за малый промежуток времени Δt плоскость AO_3O_4 повернулась на малый угол $\Delta\alpha$, а точка A совершила малое перемещение Δs, то величина (мгновенной) угловой скорости твердого тела (скорости вращения как целого) $\omega = \Delta\alpha/\Delta t$ будет связана с величиной мгновенной скорости v_A точки A по формуле

$$v_A = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{AO_3 \cdot \Delta\alpha}{\Delta t} = \omega \cdot AO_3 .$$

Вектор (мгновенной) *угловой скорости* твердого тела при этом лежит на оси вращения (правильнее сказать, что он параллелен этой оси, так как относится ко всему твердому телу и не имеет точки приложения), а его направление соответствует правилу правой руки:

Если ладонь правой руки с оттопыренным большим пальцем и сложенными остальными пальцами охватывает вращающееся тело и при этом сложенные пальцы направлены вдоль скоростей вращающихся точек поверхности твердого тела, то большой палец указывает направление вектора угловой скорости.

Введя вектор $\vec{\omega}$ и воспользовавшись векторным произведением, получим, что

$$\vec{v}_A = \left[\vec{\omega}\, \overrightarrow{O_3A}\right],$$

где $\overrightarrow{O_3A}$ – векторный отрезок, проведенный из точки O_3 в точку A. Нетрудно убедиться, что приведенное соотношение не изменится по форме, если точку O_3 заменить любой другой точкой O оси O_1O_2 (см. рис 2), т.е. будет верно и соотношение

$$\vec{v}_A = \left[\vec{\omega}\, \overrightarrow{OA}\right].$$

Но тогда для вектора мгновенной скорости $\vec{v}_B$ произвольной точки твердого тела B, характеризуемой радиусом-вектором $\vec{r}_B$, который соединяет точку B с общим «центром отсчета» (им является лежащее на оси вращения начало неподвижной системы координат), получим универсальное (единое) соотношение

$$\vec{v}_B = [\vec{\omega}\, \vec{r}_B].$$

Поскольку это важно, но часто должным образом не обсуждается, еще раз подчеркнем , что *вектор угловой скорости – это характеристика, относящаяся ко всему твердому телу в целом.* Можно даже представить себе, что все точки твердого тела в каждый момент времени «пронизываются» соответствующим однородным полем вектора $\vec{\omega}$.

С точки зрения характеристики всевозможных видов движения точек твердого тела (возможных типов его полей мгновенных скоростей), в каждый момент времени может иметь место только один из двух случаев.

Случай I: скорости всех точек твердого тела равны – поле мгновенных скоростей однородно. Если в каждый момент времени в течение некоторого временнóго интервала поле мгновенных скоростей будет однородным, то, как нетрудно сообразить, все точки твердого тела в течение этого временнóго интервала опишут (с точностью до параллельного переноса) одинаковые траектории и твердое тело будет двигаться поступательно. (Достаточным условием такого движения является равенство в каждый момент времени векторов скоростей трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой.)

Случай II: найдутся хотя бы две точки твердого тела A и B, скорости которых различны (т.е. $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$), – поле мгновенных скоростей неоднородно. В этом случае, как мы увидим дальше, твердое тело будет обязательно поворачиваться.

Упражнение 1. Если у твердого тела найдутся две точки, движущиеся с разными скоростями, то найдется и третья точка, вектор скорости которой отличается от скоростей первых двух. Докажите это.

Случай I едва ли заслуживает большого внимания, поэтому остановимся подробно лишь на случае II.

Помимо двух точек твердого тела A и B, имеющих разные скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, рассмотрим еще одну точку твердого тела C, не лежащую на прямой AB и движущуюся со скоростью $\vec{v}_C$. В принципе могут реализоваться две возможности: а) $\vec{v}_C = \vec{v}_A$ или $\vec{v}_C = \vec{v}_B$; б) $\vec{v}_C \neq \vec{v}_A$ и $\vec{v}_C \neq \vec{v}_B$.

Случай а) более простой. Очевидно, что если, например, $\vec{v}_C = \vec{v}_A$, то и вся прямая AC движется со скоростью $\vec{v}_A$. Аналогично, если $\vec{v}_C = \vec{v}_B$, то вся прямая BC движется со скоростью $\vec{v}_B$. Легко сообразить, что ось вращения твердого тела (а значит, и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$) будет направлена либо вдоль прямой AC (когда $\vec{v}_C = \vec{v}_A$), либо вдоль прямой BC ($\vec{v}_C = \vec{v}_B$). Движение твердого тела будет представлять собой в целом суперпозицию поступательного и вращательного движений – так называемое *поступательно-вращательное движение*. При этом, если скорость соответствующей прямой (пусть это будет прямая AC) имеет составляющую вдоль вектора $\vec{\omega}$, то скорости всех точек твердого тела будут иметь одинаковые составляющие на направление вектора $\vec{\omega}$. (В этом легко убедиться, перейдя в систему отсчета, движущуюся поступательно со скоростью соответствующей составляющей.) При наличии отличной от нуля составляющей вектора $\vec{v}_A$ на направление вектора $\vec{\omega}$ движение будет *винтовым*. В этом случае, очевидно, найдется жестко связанная с твердым телом прямая, скорости всех точек которой будут направлены строго вдоль направления оси вращения, – эта прямая будет мгновенной осью винтового вращения твердого тела.

Для расчета скоростей точек твердого тела (при условии, например, $\vec{v}_C = \vec{v}_A$) удобно перейти в другую систему отсчета, будем называть ее штрих-системой, движущуюся поступательно вместе с осью AC со скоростью $\vec{v}_A$. В штрих-системе отсчета ось AC будет неподвижной осью вращения твердого тела, и скорость $\vec{v}\,'_D$ точки D, характеризуемой радиусом-вектором $\vec{r}_D$, можно найти по формуле

$$\vec{v}\,'_D = \vec{v}_D - \vec{v}_A = \left[\vec{\omega}\left(\vec{r}_D - \vec{r}_A\right)\right].$$

Теперь рассмотрим случай б) – когда $\vec{v}_C \neq \vec{v}_A$ и $\vec{v}_C \neq \vec{v}_B$, при этом по условию $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$. Перейдем в штрих-систему отсчета, движущуюся поступательно со скоростью $\vec{v}_A$. В этой системе точки A, B и C будут иметь скорости $\vec{v}\,'_A = 0$, $\vec{v}\,'_C = \vec{v}_C - \vec{v}_A$ и $\vec{v}\,'_B = \vec{v}_B - \vec{v}_A$, причем $\vec{v}\,'_C \neq \vec{v}\,'_B$. Проведем через точку A две плоскости – одну, проходящую через AC и перпендикулярную вектору $\vec{v}\,'_C$ (это можно сделать, поскольку по основной теореме $\vec{v}\,'_C \perp AC$), и вторую, проходящую через AB перпендикулярно вектору $\vec{v}\,'_B$ (точно так же $\vec{v}\,'_B \perp AB$).

Пусть эти плоскости совпадают. Тогда, поскольку оба вектора $\vec{v}\,'_C$ и $\vec{v}\,'_B$ перпендикулярны общей плоскости ABC, они лежат на параллельных прямых (величины их различны). Значит, на прямой BC, а следовательно, и на плоскости ABC найдется неподвижная точка O (см. задание 3) , отличная от точки A (поскольку точки A, B и C не лежат на одной прямой). Тогда вся прямая AO будет покоиться (относительно штрих-системы) и представлять собой мгновенную ось вращения твердого тела в соответствующий момент времени. Расстояния от нее до точек B и C будут относиться как $\left|\vec{v}\,'_B\right| : \left|\vec{v}\,'_C\right|$. Если векторы $\vec{v}\,'_C$ и $\vec{v}\,'_B$ антипараллельны, то эта прямая проходит между точками B и C, а если векторы $\vec{v}\,'_C$ и $\vec{v}\,'_B$ имеют одинаковые направления, то ось вращения пройдет вне отрезка BC. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ будет параллелен указанной прямой.

Если скорость $\vec{v}_A$ точки A в исходной системе отсчета была перпендикулярна найденному нами направлению вектора $\vec{\omega}$, то найдется жестко связанная с твердым телом *неподвижная* прямая (отстоящая от прямой AO на расстояние $r = \left|\vec{v}_A\right|/\omega$) – мгновенная ось вращения твердого тела в исходной системе координат. Если же вектор скорости $\vec{v}_A$ имел отличную от нуля составляющую вдоль вектора $\vec{\omega}$, то в исходной системе координат твердое тело будет совершать винтовое движение.

Упражнение 2. Если скорость какой-нибудь точки A твердого тела равна $\vec{v}_A$, то с этой скоростью будут двигаться все точки твердого тела, попадающие на прямую, проходящую через точку A и параллельную вектору $\vec{\omega}$. Докажите это.

Движущееся таким образом твердое тело (если оно имеет конечные размеры) разбивается на систему параллельных вектору $\vec{\omega}$ отрезков, каждый из которых движется со своей скоростью, но проекции всех этих скоростей на направление вектора $\vec{\omega}$ одинаковы.

Приведенное выше соображение позволяет при рассмотрении одного и того же движения твердого тела представлять его многочисленным образом (руководствуясь соображениями удобства) в виде одновременно происходящих (суперпозиции) поступательного движения со скоростью $\vec{v}_A$ произвольной точки твердого тела A и вращения с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, проходящей через точку A. В этом случае также говорят, что твердое тело совершает поступательно-вращательное движение.

Движение твердого тела будет плоскопараллельным, если составляющие скоростей точек твердого тела на направление вектора $\vec{\omega}$ равны нулю и вектор $\vec{\omega}$ с течением времени остается параллельным одной и той же неподвижной прямой.

Наконец, рассмотрим последнюю возможность движения точек A, B и C – когда плоскость, проходящая через точку A перпендикулярно вектору $\vec{v}\,'_C$, и плоскость, проходящая через точку A перпендикулярно вектору $\vec{v}\,'_B$, не совпадают, а пересекаются по прямой AD, которая, в силу построения, перпендикулярна как вектору $\vec{v}\,'_C$, так и вектору $\vec{v}\,'_B$. Легко показать, что это и будет та неподвижная в штрих-системе прямая (мгновенная ось вращения), вдоль которой направлен вектор угловой скорости $\vec{\omega}$.

Проанализируем, чему может быть равен вектор скорости $\vec{v}'_D$ произвольной точки твердого тела D, принадлежащей построенной нами прямой AD. По построению, прямая CD перпендикулярна вектору $\vec{v}'_C$, поэтому по основной теореме кинематики твердого тела скорость $\vec{v}'_D$ точки D также будет перпендикулярна прямой CD. Поскольку скорость $\vec{v}'_A$ точки A равна нулю, вектор $\vec{v}'_D$ будет перпендикулярен прямой AD. Следовательно, он будет перпендикулярен и всей плоскости CAD. Аналогично рассуждая, мы придем к выводу, что вектор $\vec{v}'_D$ скорости точки D должен быть перпендикулярен плоскости BAD. Поскольку плоскости CAD и BAD не параллельны, а вектор $\vec{v}'_D$ перпендикулярен им обеим, то он должен быть равен нулю. Но тогда (в соответствии со следствием 4) вместе с точками A и D будут покоиться и все точки твердого тела, находящиеся на прямой AD. Таким образом, вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ будет параллелен прямой AD.

Теперь для полноты картины целесообразно затронуть еще одну тему – сложение вращательных движений твердых тел. Здесь уместно подчеркнуть, что при движении твердого тела все жестко связанные с ним параллельные между собой прямые, совершая всевозможные перемещения в пространстве, остаются параллельными между собой. Поэтому независимо от того, где внутри твердого тела она расположена, каждая из набора таких параллельных прямых при движении твердого тела поворачивается на один и тот же угол. Прямые, параллельные вектору $\vec{\omega}$, не меняют своей ориентации (остаются параллельными себе), а существеннее всего за один и тот же интервал времени поворачиваются те прямые, которые перпендикулярны вектору $\vec{\omega}$. Легко понять, что если некоторая прямая образует угол α с вектором $\vec{\omega}$, то за быстроту изменения ею своей ориентации относительно неподвижной системы отсчета будет отвечать не весь вектор $\vec{\omega}$, а его составляющая, перпендикулярная рассматриваемой прямой и равная по величине $\omega_\perp = \omega \sin\alpha$. Таким образом, жестко связанные с твердым телом прямые, участвуя в его общем вращательном движении, сами по себе при этом поворачиваются по-разному.

Пусть первое твердое тело движется так, что относительно неподвижной системы отсчета одна из жестко связанных с ним прямых O_1O_2 неподвижна и в некоторый момент времени угловая скорость этого твердого тела равна $\vec{\omega}_1$. Пусть, кроме того, имеется еще одна прямая P_1P_2, жестко связанная с первым твердым телом (в общем случае не пересекающая прямую O_1O_2 и не параллельная ей), относительно которой с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ вращается второе твердое тело. Поставим вопрос: чему будет равна угловая скорость $\vec{\Omega}$ второго твердого тела относительно неподвижной системы отсчета?

Для простоты рассуждений предположим сначала, что оси O_1O_2 и P_1P_2 пересекаются в точке O. Выберем произвольную точку A второго твердого тела, радиус-вектор которой относительно точки O равен $\vec{r}_A$. За небольшой интервал времени Δt из-за вращения самой оси P_1P_2 с угловой скоростью ω_1 точка A испытает перемещение

$$\overrightarrow{\Delta r_1} = [\vec{\omega}_1\ \vec{r}_A]\Delta t .$$

При этом ось P_1P_2 собственного вращения второго твердого тела, а с ней и вектор угловой скорости второго твердого тела $\vec{\omega}_2$, повернется вокруг вектора $\vec{\omega}_1$, и вектор $\vec{\omega}_2$ получит приращение

$$\overrightarrow{\Delta\omega_2} = [\vec{\omega}_1\ \vec{\omega}_2]\Delta t .$$

Перемещение $\overrightarrow{\Delta r_2}$ точки A вследствие вращения второго твердого тела относительно оси $P_1'P_2'$, в которую перешла ось P_1P_2, запишем в виде

$$\overrightarrow{\Delta r_2} = \left[\left(\vec{\omega}_2 + \overrightarrow{\Delta\omega_2}\right)\left(\vec{r}_A + \overrightarrow{\Delta r_1}\right)\right]\Delta t = \\ = \left[\left(\vec{\omega}_2 + [\vec{\omega}_1\ \vec{\omega}_2]\Delta t\right)\left(\vec{r}_A + [\vec{\omega}_1\ \vec{r}_A]\Delta t\right)\right]\Delta t.$$

Полное перемещение точки A найдем как

$$\overrightarrow{\Delta r_A} = \overrightarrow{\Delta r_1} + \overrightarrow{\Delta r_2} ,$$

откуда мгновенную скорость $\vec{v}_A$ точки A получим в виде

$$\vec{v}_A = \left.\frac{\overrightarrow{\Delta r_A}}{\Delta t}\right|_{\Delta t \to 0} = \left[\left(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2\right)\vec{r}_A\right].$$

Следовательно, вектор результирующей угловой скорости второго твердого тела будет равен

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 .$$

Случай, когда оси O_1O_2 и P_1P_2, жестко связанные с первым твердым телом, не пересекаются, легко сводится к предыдущему, если на оси P_1P_2 выбрать произвольную точку P, провести через нее ось $O_1'O_2'$, параллельную оси O_1O_2, и рассмотреть движение второго твердого тела относительно системы отсчета, движущейся поступательно со скоростью точки P относительно неподвижной системы отсчета, связанной с осью O_1O_2. Все рассуждения относительно поворотных перемещений второго твердого тела останутся в силе, при этом мы опять получим, что

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 ,$$

и относительно исходной системы координат скорость $\vec{v}_K$ любой точки K второго твердого тела будет равна

$$\vec{v}_K = \vec{v}_P + \left[\vec{\Omega}\left(\vec{r}_K - \vec{r}_P\right)\right].$$

Полученное выше правило сложения угловых скоростей еще раз подчеркивает векторный смысл мгновенной угловой скорости. Вот почему при рассмотрении сложного движения твердого тела бывает иногда очень удобно разложить вектор угловой скорости на составляющие по правилу параллелограмма.

Итак, можно заключить, что задача расчета поля мгновенных скоростей твердого тела сводится к следующей. Для конкретного момента времени необходимо знать скорость $\vec{v}_A$ одной из его точек A и вектор общей угловой скорости твердого тела $\vec{\omega}$. Пусть точке A отвечает радиус-вектор $\vec{r}_A$, тогда вектор скорости $\vec{r}_B$

произвольной точки твердого тела B, характеризуемой радиусом-вектором $\vec{r}_B$, можно найти по формуле

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \left[\vec{\omega}\left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right)\right].$$

Подчеркнем еще раз, что если в любой момент времени нам известны векторы скоростей трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой, то скорость любой другой его точки, а значит, и все поле мгновенных скоростей твердого тела определяются *однозначно*. Тем не менее, подход с использованием вектора угловой скорости твердого тела, будучи в кинематике абсолютно эквивалентным подходу без его участия, когда непосредственно и многократно применяют основную теорему кинематики твердого тела, считается более общим. И вот почему. Во-первых, ему отвечает универсальная формула расчета скорости, приведенная в предыдущем абзаце. Во-вторых, уравнения динамики твердого тела наиболее естественно формулируются с использованием как вектора угловой скорости, так и его временно́й производной – вектора углового ускорения. Помимо всего прочего, выражение для кинетической энергии твердого тела получает наглядное и естественное (давно ставшее почти очевидным) выражение также с привлечением вектора угловой скорости. Оказывается, что для движущегося твердого тела вектор его угловой скорости (и, соответственно, углового момента) является столь же фундаментальным, как и вектор «линейной» скорости (и, соответственно, импульса) для материальной точки.

Приложение

Обсудим вкратце взаимосвязь двух отмеченных выше кинематических подходов.

Пусть нам даны векторы скоростей $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_C$ трех точек твердого тела A, B и C, не лежащих на одной прямой, и пусть все они отличны от нуля. Перейдем в штрих-систему отсчета, движущуюся поступательно относительно исходной, с целью «сделать» скорость одной из указанных точек равной нулю. Допустим, это будет точка A. Итак, мы имеем три точки A, B и C, причем теперь $\vec{v}'_A = 0$.

Разложим далее векторы $\vec{v}'_B$ и $\vec{v}'_C$ на две составляющие – перпендикулярные ($\perp$) и параллельные ($\parallel$) плоскости ABC:

$$\vec{v}'_B = \vec{v}'_{B\parallel} + \vec{v}'_{B\perp},$$

$$\vec{v}'_C = \vec{v}'_{C\parallel} + \vec{v}'_{C\perp}.$$

Поскольку скорость $\vec{v}'_A$ равна нулю, мгновенная ось вращения твердого тела пройдет через точку A и вектор искомой угловой скорости $\vec{\omega}$ будет ей параллелен. Разложим также и искомый вектор $\vec{\omega}$ на две составляющие:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\parallel + \vec{\omega}_\perp.$$

Мы тем самым представили результирующее вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$ в виде суперпозиции двух независимых вращений – одного с угловой скоростью $\vec{\omega}_\parallel$ и второго с угловой скоростью $\vec{\omega}_\perp$. Нетрудно далее показать, что вектор $\vec{\omega}_\perp$ однозначно определяется составляющими скоростей $\vec{v}'_B$ и $\vec{v}'_C$, лежащими в плоскости ABC, как при плоскопараллельном движении. А вектор $\vec{\omega}_\parallel$ будет однозначно определяться перпендикулярными плоскости ABC составляющими этих же векторов скоростей.

Таким образом, скорость любой точки D твердого тела в штрих-системе с началом координат в точке A получим в виде суммы двух слагаемых, связанных с двумя дополняющими друг друга *одновременно происходящими* вращениями:

$$\vec{v}'_D = \left[\vec{\omega}_\perp\left(\vec{r}_D - \vec{r}_A\right)\right] + \left[\vec{\omega}_\parallel\left(\vec{r}_D - \vec{r}_A\right)\right].$$

Поэтому вектор полной скорости точки D в исходной системе отсчета будет суммой поступательной и вращательной составляющих:

$$\vec{v}_D = \vec{v}'_D + \vec{v}_A = \vec{v}_A + \left[\vec{\omega}\left(\vec{r}_D - \vec{r}_A\right)\right].$$

Именно в связи с полученным соотношением и говорят о поступательно-вращательном движении твердого тела.

В заключение вашему вниманию предлагается несколько оригинальных задач для самостоятельного решения. (Авторские решения этих задач будут опубликованы позже.)

Задача 1. Вокруг горизонтальной оси длиной L вращается с угловой скоростью ω диск радиусом R (рис.3). Ось диска сама может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее свободный конец. При какой угловой скорости вращения горизонтальной оси Ω на диске в любой момент времени найдутся покоящиеся точки?

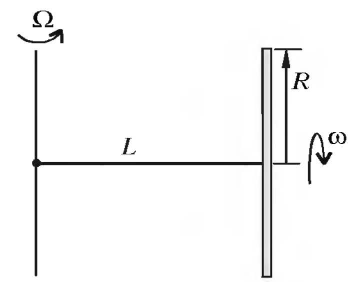


Рис. 3

Задача 2. Прямой круговой конус высотой H с углом раствора 2α перекатывается без проскальзывания по горизонтальному столу так, что центр основания конуса движется со скоростью v. С какой угловой скоростью ω должен вращаться стол относительно вертикальной оси, проходящей через вершину конуса, чтобы все точки конуса, кроме вершины, имели отличные от нуля скорости?

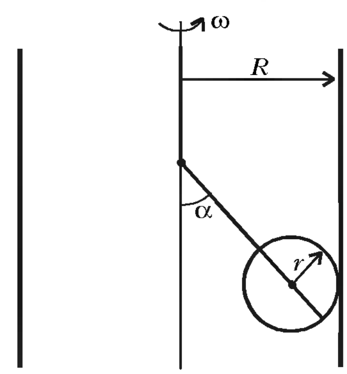


Рис. 4

Задача 3. На оси цилиндрической полости радиусом R закреплен и вращается с угловой скоростью ω тонкий стержень, изогнутый в виде угла (рис.4). Наклонный участок стержня, образующий угол α с продолжением вертикального участка, проходит через центр свободно вращающегося относительно него шарика радиусом r. Считая, что шарик относительно стенок полости не проскальзывает, определите, с какой угловой скоростью Ω он вращается относительно стержня.

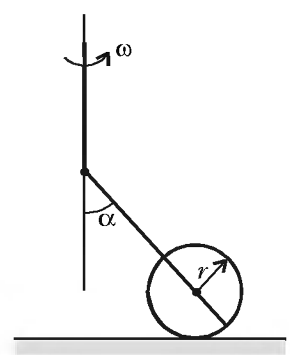


Рис. 5

Задача 4. Вдоль вертикальной оси вращается с угловой скоростью ω тонкий стержень, изогнутый в виде угла (рис.5). Наклонный участок стержня, образующий угол α с продолжением вертикального участка, прохо-

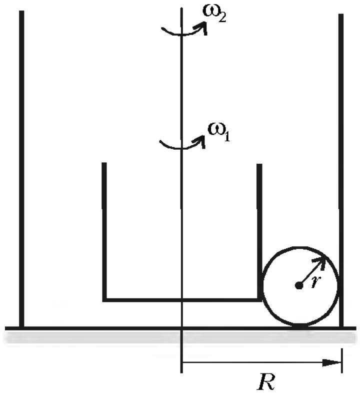


Рис. 6

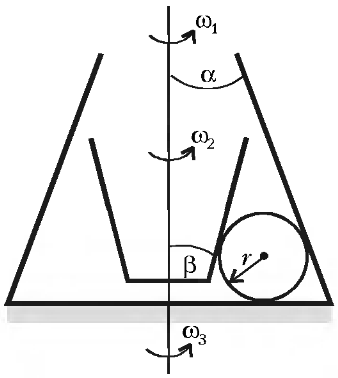


Рис. 7

дит через центр свободно вращающегося относительно него шарика радиусом r. Снизу шарик опирается на горизонтальную поверхность. Считая, что шарик не проскальзывает относительно горизонтальной поверхности, определите, с какой угловой скоростью Ω он вращается относительно стержня.

Задача 5. Шарик радиусом r лежит на дне прямой цилиндрической коробки радиусом R(рис.6). Цилиндрическая поверхность , независимо вращающаяся относительно общей с коробкой вертикальной оси и расположенная внутри коробки, прижимает шарик к стенке коробки. Считая, что внутренняя поверхность вращается с угловой скоростью ω_1 , а коробка – с угловой скоростью ω_2 , найдите скорость центра шарика, скорость верхней точки шарика и точку шарика, движущуюся с максимальной по величине скоростью. Проскальзывание шарика относительно всех поверхностей отсутствует.

Задача 6. Между двумя коническими поверхностями с углами раствора 2α и 2β, вращающимися независимо относительно общей вертикальной оси с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 соответственно (рис.7), находится шарик радиусом r, который касается обеих поверхностей. Снизу шарик опирается на горизонтальную поверхность, которая вращается с угловой скоростью ω_3 относительно той же оси. Считая, что шарик не проскальзывает относительно всех поверхностей, определите скорость центра шарика и угловую скорость вращения шарика.

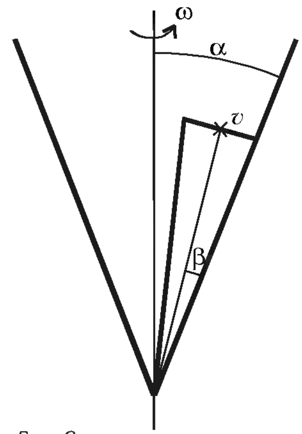


Рис. 8

Задача 7. Внутри конической поверхности с углом раствора 2α перекатывается без проскальзывания прямой круговой конус высотой H с углом раствора 2β, причем $\alpha > \beta$ (рис.8). Коническая поверхность вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω, а центр основания конуса движется со скоростью v. Считая, что вершины конуса и конической поверхности совпадают, определите угловую скорость Ω вращения конуса.

Не сдавайтесь, мистер Фейнман!

И.АКУЛИЧ

ЗНАМЕНИТЫЙ АМЕРИКАНСКИЙ ФИЗИК РИЧАРД Фейнман помимо своих профессиональных качеств выделялся редкой способностью быстро производить в уме приближенные вычисления с приемлемой точностью. И он это делал не за счет каких-то сверхъестественных способностей, а умелым использованием свойств различных чисел и функций. Примеры таких вычислений приводятся им в автобиографической книге «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!». В частности, там есть такой эпизод:

«Как-то у меня было хорошее настроение, и, сам не знаю отчего, я вдруг объявил: «Берусь за 60 секунд решить с точностью 10% любую задачу, которую вы сможете сформулировать за 10 секунд».

Был обеденный перерыв. Все наперебой начали придумывать сложные, как им казалось, задачи. Например, найти определенный интеграл от функции вроде $1/(1+x^4)$ *(она, как оказалось, почти не менялась в предложенных пределах). Самое сложное, что они придумали, было найти коэффициент при* x^{10} *в разложении* $(1+x)^{20}$ *. Я все-таки уложился в минуту.*

Все шло как нельзя лучше, когда в холл вошел Пол Улам, мой старый знакомый еще по Принстону, который всякий раз оказывался умнее меня...

Так вот, он вошел в холл, и все закричали:

— Привет, Пол! Во, Фейнман дает! Мы придумываем ему задачи, а он их все решает за минуту с точностью 10%. Попробуй сам!

Почти не задумываясь, он говорит:

– Тангенс от 10^{100} .

Безнадежно: надо делить на π *со ста значащими цифрами! Я сдался».*

С великим физиком следует согласиться: произвести в уме деление на π со ста значащими цифрами (тем более за минуту) – дело бесперспективное.

Но если не знаешь ответа и никак не можешь его получить, может быть, имеет смысл этот ответ *угадать?*

Допустим, мы дали ответ: искомый тангенс равен некоторому числу x. По условию пари мы окажемся победителями, если оно отличается от истинного значения $x_{\text{ист}}$ не более чем на 10%, т.е. если выполняется неравенство $0{,}9 \cdot x_{\text{ист}} \le x \le 1{,}1 \cdot x_{\text{ист}}$, откуда $\frac{x}{1{,}1} \le$ $\le x_{\text{ист}} \le \frac{x}{0{,}9}$. Но такое произойдет, если истинное значение аргумента, в свою очередь, лежит между $\operatorname{arctg}\frac{x}{11}$ и $\operatorname{arctg}\frac{x}{0{,}9}$. Ширина интервала, в котором может лежать устраивающее нас значение аргумента, равна, таким образом $Ш(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{0{,}9} - \operatorname{arctg}\frac{x}{1{,}1}$. Следовательно, если назвать такое x, которому соответствует *наибольшее* $Ш(x)$, то в этом случае вероятность попадания истинного значения аргумента в указанный интервал максимальна.

Но чему равно это x? Сразу видно, что если x очень близко к нулю, то и оба арктангенса близки к нулю, а разность между ними – тем более. Если же взять очень большое (по абсолютной величине) значение x, то арктангенсы приблизятся к $\pi/2$ (или к $-\pi/2$) и разность опять же устремится к нулю. Значит, ответ надо искать где-то в промежутках. Поскольку среднее арифметическое между 0 и $\pi/2$ это $\pi/4$, то резонно назвать в качестве ответа число $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ (или $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$). Для очистки совести давайте проверим нашу догадку и возьмем несложную производную:

$$\frac{dШ}{dx} = \frac{1}{0{,}9} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x}{0{,}9}\right)^2} - \frac{1}{1{,}1} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1{,}1}\right)^2} = \frac{0{,}2 \times \left(0{,}99 - x^2\right)}{\left(0{,}81 + x^2\right) \times \left(1{,}21 + x^2\right)},$$

которая, как видно, обращается в ноль при $x \approx \pm 0{,}995$, что, учитывая смысл поставленной задачи, практически идентично угаданным значениям ± 1.

Итак, заявляя, что тангенс от 10^{100} равен с десятипроцентной погрешностью единице (или минус единице), мы, конечно, не гарантируем, что так оно и есть, но любой другой ответ был бы *еще хуже.*

Надо сказать, что упомянутый Фейнманом Пол Улам заслуживает некоторой претензии. Ведь нет никаких сомнений, что и Фейнман, и его «противники» имели в виду задачи, правильность решения которых может быть проверена в течение *разумного* времени (скажем, до конца того же обеденного перерыва). Задача же Улама к таковым не относится – по крайней мере, тогда не относилась. Однако времена с тех пор изменились, и компьютер нынче – не диво. А раз так, то у нас есть реальная возможность произвести прямую проверку. Разумеется, просто поделить 10^{100} на π мы не сможем – никакой компьютер не «ухватит» 100 значащих цифр. Но составить простейшую программку, позволяющую получить нужное количество знаков *по одному*, сумеет любой школьник, худо-бедно умеющий программировать. Вот как выглядит значение π, содержащее 104 знака после запятой (этого более чем достаточно для расчетов с необходимой точностью):

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214…

Дополнение. Процитированный в начале этой статьи отрывок был взят из седьмого номера журнала «Квант» за 1989 год. Полностью книга тогда еще не была переведена на русский язык. Наконец, в 2001 году долгожданный момент наступил. Открываю, читаю то же место… Конечно, сразу видно, что перевод другой. Это, разумеется, непринципиально. Важнее другое – фраза Пола Улама звучит здесь так: «Тангенс 10 в сотой степени градусов. Обратите внимание – *градусов*! Вот это как раз принципиально. Неужели в том, первоначальном переводе была ошибка? Уверен, что нет – наоборот, ошибка именно в добавлении слова «градусов». Почему? А потому, что в такой постановке задачи (с градусами) нет ни малейшей необходимости делить на π со 100 десятичными знаками. Ну, а с такой задачей Фейнман бы точно справился. Более того, я решил пойти по его стопам и вычислить самостоятельно тангенс от 10^{100} градусов (с допустимой погрешностью 10%) в уме, без карандаша, бумаги или калькулятора. И с гордостью скажу – удалось! Конечно, не за минуту (не Фейнман все-таки!), но в три-четыре минуты уложился. Как? Сейчас расскажу. Только учтите, описание заняло гораздо больше времени, чем сами вычисления.

Рассуждения были таковы. 10^{100} градусов – это $\frac{10^{100}\pi}{180}$ радиан. Но $\frac{10^{100}\pi}{180} = \frac{5 \cdot 10^{98}\pi}{9}$. Число $5 \cdot 10^{98}$ при делении на 9 дает остаток 5, поэтому

$$\operatorname{tg}\left(10^{100}\right)^\circ = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{9} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{18}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{18} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}} \approx -\frac{18}{\pi}$$

(для малого угла, выраженного в радианах, тангенс почти равен самому углу: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18}$).

До сих пор, полагаю, и Фейнман шел бы по той же дорожке. Но дальнейшие его действия предугадать не берусь. Скорее всего, он помнил значение $\frac{1}{\pi}$, и ему осталось просто перемножить пару чисел, но я-то не помнил! Пришлось искать другой путь, и он оказался тоже неплох. Не могу сейчас сказать, почему, но возникло непреодолимое желание поделить числитель и знаменатель на 3. Число 18 поделится легко, а $\pi/3$ – это примерно 1,05. Поэтому $\frac{18}{\pi} \approx \frac{6}{1{,}05}$. Делить на 1,05 в уме – удовольствие тоже небольшое, но можно заменить его *умножением*, используя популярную формулу $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, справедливую для малых x. Поэтому $\frac{1}{1{,}05} \approx 0{,}95$, так что $\frac{6}{1{,}05} \approx 6 \times 0{,}95 = 5{,}7$. Готово: $\operatorname{tg}\left(10^{100}\right)^\circ \approx -5{,}7$. Осталось последнее: молиться, чтобы ошибка не превысила допустимые 10%. Что ж, проверим на калькуляторе: $\operatorname{ctg}10^\circ = \operatorname{tg}80^\circ = 5{,}67\ldots$ Вот это да! Погрешность составляет лишь около *полпроцента.* Чем не повод для гордости? Хотя, повторим, именно эта легкость получения ответа, да притом с высокой точностью, свидетельствует о том, что слово «градусов» Пол Улам все-таки не произносил.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2004 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2003» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1886» или «Ф1893». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1886 и М1889 предлагались на XXIX Всероссийской математической олимпиаде.

Задачи М1886–М1890, Ф1893–Ф1897

М1886. На столе лежат картинками вниз 8 игральных карт. Вы можете указать на любую группу карт (в частности, на одну карту или, например, на все 8) и спросить, сколько карт бубновой масти в этой группе. В качестве ответа вам сообщат число, отличающееся от истинного значения на 1. Как при помощи 5 вопросов наверняка узнать число бубновых карт, лежащих на столе?

С.Токарев

М1887. Из точки пересечения диагоналей O описанного четырехугольника $ABCD$ опущены последовательно перпендикуляры OK, OL, OM, ON на его стороны. Докажите, что $1/OK + 1/OM = 1/OL + 1/ON$.

А.Заславский

М1888. В шкатулке n монет достоинством в целое число дукатов каждая на сумму $2n-1$ дукатов. Докажите, что любую сумму от 1 до $2n-1$ можно предоставить монетами из шкатулки.

В.Произволов

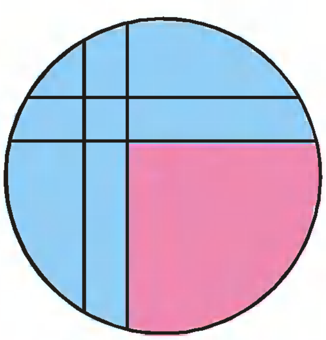


Рис.1

М1889. На плоскости даны точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Докажите, что точки B_i можно перенумеровать так, что для всех $i \neq j$ угол между векторами $\overrightarrow{A_iA_j}$ и $\overrightarrow{B_iB_j}$ будет острым или прямым.

Р.Карасев

М1890. Четыре хорды разделяют круг на девять частей, одна из которых является прямоугольником (рис.1). Площади восьми синих частей – рациональные числа. Докажите, что площадь красного криволинейного треугольника – рациональное число.

В.Произволов

Ф1893. В системе на рисунке 2 блоки легкие, нити легкие и практически нерастяжимые. Оси верхних блоков неподвижны, свободные куски нитей вертикальны. Все грузы, кроме одного – самого правого, имеют массы M, груз справа поменьше, он имеет массу 0,5 M. Вначале нижние грузы удерживали, затем одновременно отпустили. Найдите ускорения всех грузов.

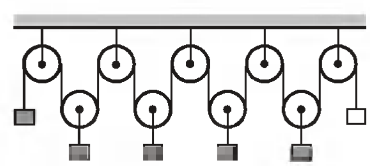


Рис.2

З.Рафаилов

Ф1894. Большая неподвижная горка имеет форму полусферы радиусом R. Тело массой m втаскивают на горку так, что приложенная к телу внешняя сила в каждой точке направлена по касательной к поверхности горки. Какое минимальное количество теплоты может выделиться при перемещении тела из нижней точки в верхнюю? Коэффициент трения на поверхности горки μ.

М.Москвитин

Ф1895. Очень большое тело имеет массу M и удельную теплоемкость c. Какую максимальную механическую работу можно получить при помощи очень маленькой тепловой машины, используя большое тело в качестве нагревателя? А можно ли получить еще больше? Сколько именно? Во всех случаях считать, что температура

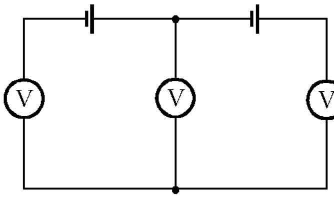


Рис.3

окружающей среды T_1 не меняется. Начальная температура тела T_2 выше температуры окружающей среды.

А.Вениг

Ф1896. В схеме на рисунке 3 батарейка справа имеет напряжение 5 В, вольтметр справа показывает 6 В. Найдите напряжение второй батарейки и показания остальных двух вольтметров. Все вольтметры одинаковые.

Р.Александров

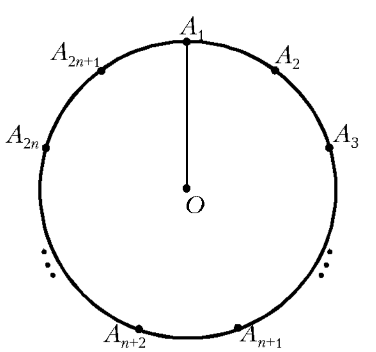
Ф1897. «Суточный» ТВ-спутник выработал свой ресурс, его заменили другим, запущенным на ту же орбиту, но первый не отключился и продолжает работу. Теперь телевизионные приемники принимают оба сигнала, частоты которых точно совпадают. Найдите «медианный» уровень сигнала на входе приемника (медианным называют уровень, который превышается в половине времени приема). Найдите уровень, ниже которого суммарный сигнал падает в течение 1% времени приема. Уровень сигнала от одного передатчика составляет U_0. Скорости спутников почти одинаковы, периодически срабатывает система коррекции орбиты.

А.Зильберман

Решения задач М1861—М1870, Ф1878—Ф1882

М1861. *Точки в количестве $2n+1$ разделили окружность на $2n+1$ равных дуг, где $n>1$. Среди этих точек $n+1$ – красные. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с красными вершинами.*

Все $2n+1$ точек последовательно обозначим по часовой стрелке, начав с какой-либо красной точки: $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_{2n+1}$ (см. рисунок).



При этом $n+1$ точек – красные, остальные будем считать черными. Назовем хорду с концами в отмеченных точках интересной, если она перпендикулярна радиусу OA_1; таких хорд n штук.

Если найдется интересная хорда с красными концами, то налицо тройка красных точек, являющихся вершинами равнобедренного треугольника, – это концы хорды и точка A_1.

Если найдется интересная хорда с черными концами, то в силу численного соотношения между красными и черными точками непременно найдется хорда с красными концами, и мы возвращаемся к случаю, который только что «проходили».

Теперь мы вправе считать, что концы любой интересной хорды разноцветные. Положим для определенности, что у интересной хорды $A_{n+2}A_{n+1}$ красным является левый конец, т.е. точка A_{n+2} красная. На очереди интересная хорда $A_{2n+1}A_2$. Если красным является ее правый конец, то все вершины равнобедренного треугольника $A_2A_1A_{n+2}$ красные. Так что будем считать, что точка A_{2n+1} красная.

Переключаемся на интересную хорду $A_{2n}A_3$. Если красным является ее левый конец, то равнобедренный треугольник $A_{2n}A_{2n+1}A_1$ обладает только красными вершинами. Если же красным является ее правый конец, т.е. точка A_3, то треугольник $A_{n+2}A_{2n+1}A_3$, будучи равнобедренным, обладает только красными вершинами.

Этим доказательство завершается.

В.Произволов

М1862. *Биссектрисы AD, BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке I. Докажите, что а) если $ID = IF = IE$, то треугольник ABC правильный; б) если треугольник DFE правильный, то и треугольник ABC правильный.*

Ниже нам понадобится следующий легко доказываемый

Признак равенства треугольников. *Пусть $a=a'$, $b=b'$, $\alpha=\alpha'$ и пусть углы β и β' – оба острые либо оба тупые. Тогда треугольники ABC и $A'B'C'$ равны.*

Пусть теперь I – некоторая точка на биссектрисе угла A, а E и F – две точки на его сторонах, равноудаленные от I (рис.1,*а*). Из признака следует, что $AE=AF$. В случае рисунка 1,*в* ситуация аналогичная.

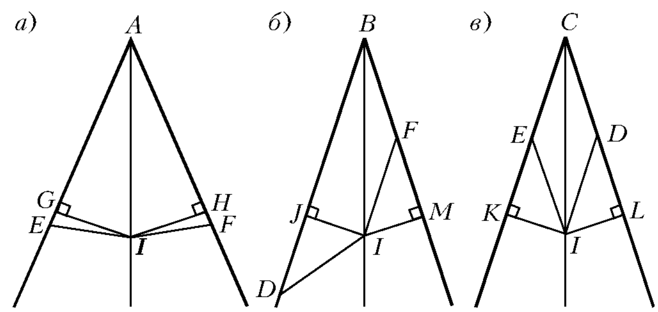


Рис.1

Рассмотрим теперь конфигурацию рисунка 1,*б*. Поскольку $\angle DIJ = \angle FIM$, то $\angle DIF = \angle JIM = \pi - \angle JBM$, т.е. $BDIF$ – вписанный четырехугольник.

Обратно, пусть $BDIF$ – вписанный четырехугольник, $J(M)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки I на прямую BD (BF). Тогда ни один из углов DIF и JIM не может лежать строго внутри другого. Следовательно, взаимное расположение точек на сторонах угла соответствует конфигурации рисунка 1,*б*.

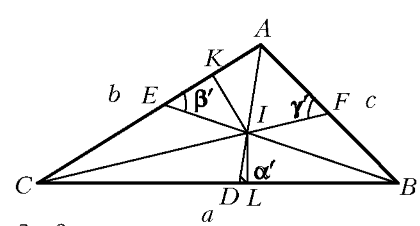


Рис.2

а) *Первое решение.* Пусть $a \ge b \ge c$. Тогда, как легко показать, конфигурация совпадает с изображенной на рисунке 2 – дугами отмечены углы, не превосходящие $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, как доказано выше, $AE = AF$, откуда легко вывести равенство $b=c$. Аналогично, $a=b$.

Второе решение. Решим более общую задачу: изучим соотношения между длинами отрезков ID, IE и IF в случае произвольного треугольника ($a \ge b \ge c$). Сопоставим каждому из этих отрезков угол между ним и соответствующей стороной треугольника; ясно, что больший отрезок соответствует меньшему углу. Имеем:

$$\beta' = \pi - \alpha - \frac{\beta}{2} \le \pi - \beta - \frac{\alpha}{2} = \alpha',$$

$$\beta' = \pi - \alpha - \frac{\beta}{2} \le \pi - \alpha - \frac{\gamma}{2} = \gamma'.$$

Мы получили $IE \ge \max\{ID, IF\}$. При этом $IE = ID$ в точности при $\alpha = \beta$, а $IE = IF$ в точности при $\beta = \gamma$.

Заметим также, что $ID \ge IF$ в точности при $\beta \ge \dfrac{\pi}{3}$.

б) Очевидно, описанная окружность треугольника DEF содержит не более одной вершины треугольника ABC. Следовательно, среди четырехугольников $AEDF$, $BDEF$ и $CDFE$ не более одного вписанного. Рассуждениями, аналогичными первому решению пункта а), получаем отсюда доказываемое утверждение.

Могут ли быть равными два из трех отрезков DE, EF и FD в случае неравнобедренного треугольника? Этот вопрос – содержание одной из задач из книги И.Ф.Шарыгина «Задачи по геометрии (планиметрия)» (М.: Наука, 1982, с. 157). (См. также статью И.Ф.Шарыгина «Вокруг биссектрисы» в «Кванте» №8 за 1983 г.) Ответ на вопрос положителен. Из приведенного в книге доказательства этого факта можно получить еще одно решение пункта б).

А.Заславский, В.Сендеров

М1863*. *Рассмотрим последовательность, первые два члена которой равны 1 и 2 соответственно, а каждый следующий член – наименьшее натуральное число, которое еще не встретилось в последовательности и которое не взаимно просто с предыдущим членом последовательности. Докажите, что каждое натуральное число входит в эту последовательность.*

Докажем сначала две леммы.

Лемма 1. *Исследуемая последовательность содержит бесконечно много четных чисел.*

Доказательство. Предположим противное: лишь несколько членов последовательности четны, т.е. существует такое натуральное m, что все числа $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ нечетны. Поскольку все члены последовательности различны, существует такое $k \ge m$, что $a_k < a_{k+1}$ и $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1} < a_k$. Обозначим буквой p наименьший простой делитель числа a_k. Тогда $a_{k+1} \ge a_k + p$ (иначе a_k и a_{k+1} были бы взаимно простыми). Поскольку сумма $a_k + p$ двух нечетных чисел четна, то $a_{k+1} > a_k + p$. Следовательно, a_{k+1} не является наименьшим натуральным числом, отличным от $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и не взаимно простым с a_k. Противоречие.

Лемма 2. *Пусть p – простое число. Если последовательность (a_n) содержит бесконечно много чисел, кратных p, то она содержит все натуральные числа, кратные p.*

Доказательство. Пусть существует число pn, не содержащееся в изучаемой последовательности. Почти все (т.е. все, начиная с некоторого номера m) члены последовательности больше pn. Рассмотрим такое кратное p число a_k, что $k > m$. Очевидно, pn претендует на роль a_{k+1}. Противоречие.

Теперь — собственно решение задачи. По лемме 1, изучаемая последовательность содержит бесконечно много четных чисел. Следовательно, по лемме 2 она содержит все четные числа и поэтому для любого простого p содержит бесконечно много чисел, кратных p. Еще раз применив лемму 2, заключаем, что для любого простого p последовательность содержит все натуральные числа, кратные p. Отсюда и следует утверждение задачи.

Замечание. Эта задача заимствована из статьи «The EKG Sequence» (*J.C. Lagarias, E.M. Rains, N.J.A. Sloane*). Буквы «EKG» означают «электрокардиог-

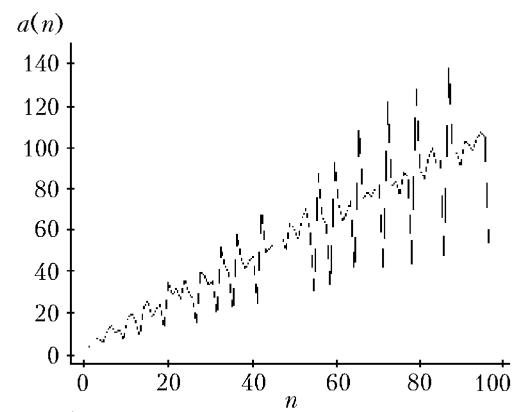


Рис.1

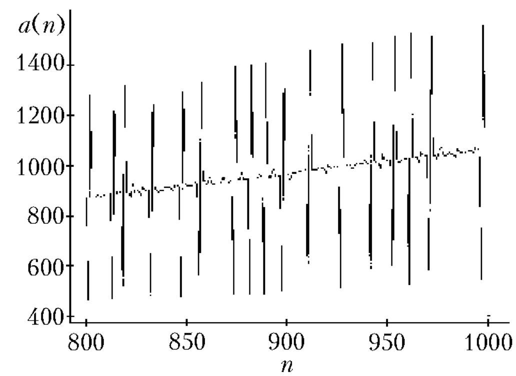


Рис. 2

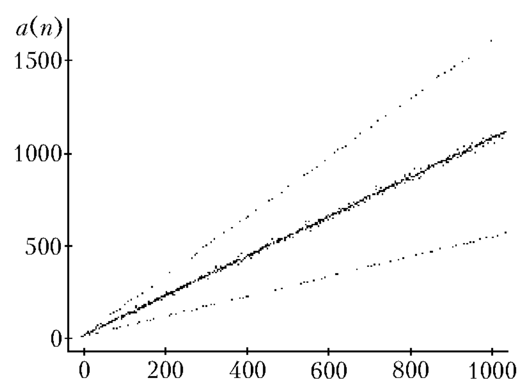


Рис.3

рамма». На рисунке 1 изображены первые 100 членов последовательности, причем для наглядности последовательные точки графика соединены отрезками. На рисунке 2 то же самое сделано для членов с 800-го по 1000-й. Кажется, нет никакого порядка. Но взгляните на рисунок 3, где (уже без соединяющих отрезков) показаны первые 1000 членов последовательности. Они выстроились вдоль трех прямых, заданных уравнениями $y = x/2$, $y = x$ и $y = 3x/2$.

Вычисления подсказывают гипотезу: если a_n — простое число, то $a_n \approx n/2$; если a_n — утроенное простое число, то $a_n \approx 3n/2$; в остальных случаях $a_n \approx n$. Доказаны, однако, лишь неравенства $\frac{1}{14} < \frac{a_n}{n} < 260$.

А.Спивак

М1864. *В квадрат ABCD вписана ломаная MKALN такая, что $\angle MKA = \angle KAL = \angle ALN = 45^\circ$ (рис.1). Докажите, что*

$$MK^2 + AL^2 = AK^2 + NL^2.$$

Симметрично отразим треугольник ABK относительно гипотенузы AK, а треугольник ADL − относительно гипотенузы AL (рис.2). При этом точки B и D склеятся

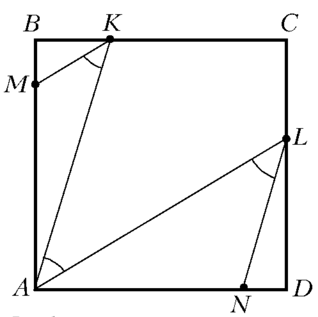


Рис.1

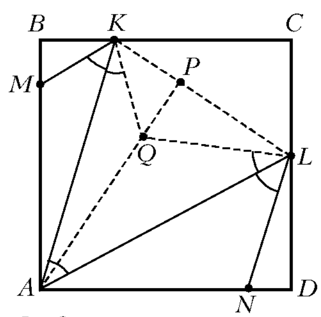


Рис.2

в точку P, так как $AB = AD$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$ и AP является высотой треугольника AKL. Более того, при этом точки M и N склеятся в точку Q, где Q − ортоцентр треугольника AKL. Это произойдет потому, что $\angle QLA = \angle QKA = \angle KAL = 45^\circ$, из чего следует, что прямые QL и QK − высоты треугольника AKL, а три высоты пересекаются в одной точке.

Сразу делаем вывод: $BM = DN$.

Используя теорему Пифагора сначала для треугольников ABK и MBK, а затем для треугольников ADL и NDL, получаем $AB^2 - BM^2 = AK^2 - MK^2$ и $AD^2 - DN^2 = AL^2 - NL^2$. Окончательно получим $MK^2 + AL^2 = AK^2 + NL^2$, что и требовалось.

Дополнительно можно доказать, что $AM = AN = KL$ и что пять точек M, K, A, L и N принадлежат одной окружности.

В.Произволов

М1865*. *Для натурального числа N = 46 можно указать натуральное число*

$$M = 46010002174385736029571 6,$$

обладающее следующими свойствами: 1) первые цифры числа M представляют собой число N; 2) если эти первые цифры перенести в конец числа M, то (отбросив при необходимости первые нули) получим число

$$M_1 = 1000217438573602957164 6,$$

которое ровно в N раз меньше числа M. Для каких еще натуральных N существует число M, обладающее такими же свойствами?

Ответ: такое M существует *для всех* натуральных N. В условии указано $N = 46$ только потому, что для него соответствующее число M получается не очень длинное: всего-то 22 цифры. Скажем, для $N = 48$ число M содержит более 4 тысяч цифр.

Идею «конструирования» такого числа M по заданному N поясним на «живом» примере − том самом $N = 46$, которое дано в условии. Итак, должно быть $M_1 \times 46 = M$, причем последние две цифры числа M_1 тоже образуют число 46. Это позволяет вычислить последние две цифры числа M, а именно: $46 \times 46 = 2116$, поэтому последние две цифры числа M − это 16. Но они же − две «предпоследние» цифры числа M_1 (т.е. четвертая и третья от конца). Таким образом, знаем еще две цифры в конце числа M_1, что позволяет обнаружить еще две цифры в конце числа M, т.е. $16 \times 46 + 21 = 757$ (21 − то, что осталось от 2116 после отбрасывания двух последних цифр). Видимо, теперь схема ясна, и можем двигаться дальше: 57 пишем, 7 на ум пошло, затем $57 \times 46 + 7 = 2629$, т.е. 29 пишем, 26 запоминаем, и т.д. В конечном счете добираемся до очередного произведения, равного как раз 46 (т.е. того, с чего начали). Все − достаточно! Именно с этих цифр начинается искомое число M (а число M_1 этими же цифрами заканчивается).

Правда, может создаться впечатление, что нам с числом 46 просто повезло: в последовательности получаемых произведений (2116, 757, 2629, ...) встретилось произведение, в точности равное 46. А вдруг для другого N произведение, равное N, *никогда* не встретится? Тогда и подобрать соответствующее M мы не сможем.

И тем не менее − сможем! Оказывается, при «строительстве» числа M указанным способом мы *непременно* встретим произведение, равное N. Докажем это.

Пусть число N содержит c цифр. Опишем использованный выше алгоритм в общем случае. Будем искать M в виде числа, количество цифр в котором кратно c. Для этого заранее разобьем число M от конца к началу на группы по c цифр и будем определять эти группы последовательно справа налево. Каждая такая группа образует число a_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) − нумерация также справа налево. В качестве исходного «нулевого» числа a_0 берется, естественно, число $a_0 = N$. Кроме того, каждый раз при перемножении нам приходилось запоминать некоторое число, чтобы добавить его к следующему произведению. Обозначим это число через b_n. Исходное его значение, конечно же, $b_0 = 0$.

Итак, имея исходные значения, многократно повторяем следующий алгоритм перехода от пары (a_n, b_n) к паре (a_{n+1}, b_{n+1}). Вычисляем $(a_n \times N + b_n)$. Далее, последние c цифр получившегося результата образуют число a_{n+1}, а то, что останется от результата после отбрасывания этих c цифр, образует число b_{n+1}.

Сразу видно, что пара (a_{n+1}, b_{n+1}) однозначно определяется парой (a_n, b_n). Убедимся, что и каждая предыдущая пара чисел (a_n, b_n) однозначно определяется последующей парой (a_{n+1}, b_{n+1}). В самом деле, если известна пара (a_{n+1}, b_{n+1}), то известно и число $(a_n \times N + b_n)$ – оно равно $10^c \times b_{n+1} + a_{n+1}$ (именно потому, что последние c цифр получившегося результата образуют число a_{n+1}, а то, что останется от результата после отбрасывания этих c цифр, образует число b_{n+1}).

Далее, для всех n будет $b_n < N$. Это легко доказать индукцией по n. В самом деле, для $n = 0$ это верно: $b_0 = 0 < N$. Пусть это верно и для $n = k$. Тогда $a_k \times N + b_k < a_k \times N + N = (a_k + 1)N$. Все числа a_k не более чем c-значные, поэтому $a_k + 1 \le 10^c$. Следовательно, $a_k \times N + b_k < 10^c \times N$. После отбрасывания последних c цифр (нулей) у числа $10^c \times N$ получится число N. Ясно, что после отбрасывания последних c цифр у заведомо меньшего числа $a_k \times N + b_k$ получится число, строго меньшее N. Но ведь это и есть, согласно нашему алгоритму, b_{k+1}. Индукционный переход завершен.

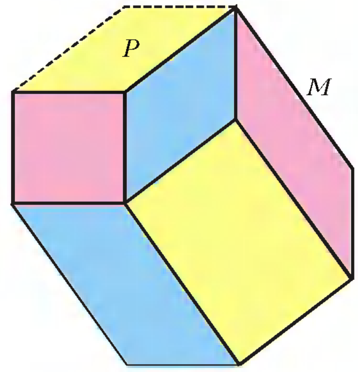
Поскольку же $b_n < N$, то из значения $(a_n \times N + b_n)$ однозначно определяются a_n и b_n, ведь здесь a_n и b_n – частное и остаток от деления $(a_n \times N + b_n)$ на N – и никак иначе.

Итак, последовательность пар (a_n, b_n) «жесткая» – т.е. однозначно определяется в обе стороны. Далее, так как каждое из чисел a_n, b_n – целое неотрицательное и меньшее 10^c, то всевозможных пар (a_n, b_n) конечное число. Значит, в последовательности этих пар какая-то пара непременно встретится дважды. Пусть совпали пары (a_n, b_n) и (a_{n+m}, b_{n+m}). Но продвинувшись от пары (a_n, b_n) на n «шагов» назад, мы получаем пару (a_0, b_0). Тогда, продвинувшись от совпадающей с ней пары (a_{n+m}, b_{n+m}) на n «шагов» назад, мы получаем пару (a_m, b_m), которая, в силу «жесткости» нашей последовательности, совпадает с парой (a_0, b_0). Таким образом, пара (a_0, b_0) непременно встретится повторно, и мы получаем возможность «оборвать» последовательность в нужном месте, конструируя число M. Понятно, что при этом, записывая подряд числа a_n, мы должны дополнить полученное число слева нулями до c цифр, если их окажется меньше.

И.Акулич

М1866. *Остров разделен на княжества, каждое из которых представляет собой на карте острова параллелограмм. При этом любые два параллелограмма либо не имеют общего участка границы, либо в качестве общего участка границы имеют общую сторону. Докажите, что для правильной раскраски карты острова достаточно трех красок. (Раскраска правильная, если любые два княжества, имеющие общий участок границы, закрашены в разные цвета.)*

Будем представлять себе карту острова многоугольником M, который разрезан на параллелограммы согласно условию. При этом параллелограммов n штук, а в нашем распоряжении имеются красная, синяя и желтая краски.



Если $n \le 3$, то, ясное дело, такую карту мы сможем правильно окрасить. Полагаем, что любую карту, содержащую не более n княжеств, мы сможем правильно окрасить тремя красками. Из такого предположения мы выведем, что карту, содержащую $n + 1$ параллелограммов, мы тоже сможем окрасить правильно, располагая красной, синей и желтой красками.

Для этого сформулируем и докажем вспомогательное утверждение. Вот какое: если многоугольник разрезан на параллелограммы так, как оговорено условием задачи, то среди них найдется такой, у которого имеются две стороны, не являющиеся сторонами остальных параллелограммов.

Иначе говоря, нужно доказать, что найдется параллелограмм P, две (или более) стороны которого принадлежат границе многоугольника M.

Допустим противное: последовательные стороны $l_1, l_2, \ldots, l_k$ k-угольника M являются в то же время сторонами k (не менее!) параллелограммов $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Но тогда сумма углов при этих пограничных сторонах таких параллелограммов равна $180^\circ \cdot k$ и должна быть меньше или равна сумме углов k-угольника M, т.е. $180^\circ(k-2)$, что неверно, – противоречие.

Завершаем индукцию. Многоугольник M содержит $n + 1$ княжеств-параллелограммов. Вычтем из него на минуту параллелограмм P, две стороны которого принадлежат границе M. Получим многоугольник M_1, n параллелограммов которого можно правильно окрасить тремя красками (см. рисунок). У параллелограмма P при этом только два соседа – пусть один из них красный, а другой синий. Значит, P можно окрасить в желтый цвет, и правильность окраски сохранится.

В.Произволов

М1867*. *Пусть M – множество членов некоторой геометрической прогрессии. Каково наибольшее возможное число элементов в пересечении множества M с множеством*

а) $\{2^n - 1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$; *б)* $\{2^n + 1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$?

а) **Ответ**: 2.

Лемма 1. *Если натуральные числа p и q взаимно просты, $a > 1$, то НОД$\left(a^p - 1, a^q - 1\right) = a - 1$.*

Для доказательства достаточно применить алгоритм Евклида.

Лемма 2. *Пусть a четно. При любом простом p число $a^p - 1$ имеет хотя бы один простой делитель, не являющийся делителем числа $a - 1$.*

Доказательство. При $p = 2$ утверждение очевидно. Пусть $p > 2$. Рассмотрим разложение

$$a^p - 1 = (a-1)\left(a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a^2 + a + 1\right) = (a-1)b.$$

Докажем вначале, что числа $a - 1$ и b не могут иметь общего делителя q, отличного от 1 и от p. Действительно, если $a - 1$ делится на q, то и $a^m - 1$ делится на q при любом натуральном m. Значит, $b = ql + p$, где l — некоторое целое число. Поэтому b делится на q лишь при $q = 1$ или p.

Таким образом, для завершения доказательства леммы осталось рассмотреть случай, когда $b = p^n$ и $a-1$ делится на p. Докажем, что этот случай невозможен. Поскольку $b > p$, достаточно доказать, что b не делится на p^2. Докажем это. Если $a = p^{\alpha}k+1$, где k не делится на p, то

$$a^p = \left(p^{\alpha}k+1\right)^p =$$
$$= 1 + p^{\alpha+1}k + p\frac{p-1}{2}p^{2\alpha}k^2 + \ldots = 1 + p^{\alpha+1}k + p^{\alpha+2}d,$$

где d целое. Отсюда $a^p - 1 = p^{\alpha+1}(k+pd)$. Поскольку k не делится на p, то очевидно, что b делится на p и не делится на p^2. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если m не делится на n, то число $2^n - 1$ имеет простой делитель, не делящий $2^m - 1$.*

Доказательство. Пусть $n = p^{\alpha}\ldots$, $m = p^{\beta}\ldots$, где $\alpha > \beta \ge 0$. Из леммы 2 следует, что у числа $2^{p^{\alpha}} - 1$ есть простой делитель q, не делящий $2^{p^{\beta}} - 1$. Так как $2^n - 1$ делится на $2^{p^{\alpha}} - 1$, то $2^n - 1$ делится на q, однако вследствие леммы 1 число q не делит $2^m - 1$. Лемма доказана.

Теперь займемся непосредственно решением пункта а). Предположим противное:

$$\begin{cases} 2^a - 1 = a_1 q^{\alpha}, \\ 2^b - 1 = a_1 q^{\beta}, \\ 2^c - 1 = a_1 q^{\gamma}, \end{cases}$$

где $\alpha > \beta > \gamma \ge 0$. Тогда

$$\left(2^b - 1\right)^n = \left(2^a - 1\right)^m \left(2^c - 1\right)^{n-m},$$

где $n > m$. Пользуясь равенством $2^x \cdot \left(2^{-x} - 1\right) = 1 - 2^x$ и переходя к модулям, приходим к равенству $\left(2^B - 1\right)^n = \left(2^A - 1\right)^m \left(2^C - 1\right)^{n-m}$, где A, B и C — натуральные числа, среди которых есть неравные. Кроме того, легко видеть, что $\max\{A,C\} \ge B$, причем равенство имеет место в точности при $A = C$. Значит, $\max\{A,C\} > B$. Однако из леммы 3 следует, что B делится на A и B делится на C. Противоречие.

б) **Ответ**: 3 (а именно, $2^{-3}+1$, $2^{-1}+1$ и 2^0+1).

Лемма 1. *Пусть r и s — нечетные натуральные числа, a — четное натуральное число, m и n — неотрицательные целые числа, $n \ne m$. Тогда числа $a^{2^m r} + 1$ и $a^{2^n s} + 1$ взаимно просты.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда числа $b^{2^m} + 1$ и $b^{2^n} + 1$, где $b = a^{rs}$, тоже имеют общий делитель. Пусть для определенности $m < n$. Тогда

$$b^{2^n} - 1 = \left(b^{2^{n-1}} + 1\right)\left(b^{2^{n-2}} + 1\right)\ldots\left(b^{2^m} + 1\right)\ldots$$
$$\ldots\left(b^2 + 1\right)(b+1)(b-1),$$

откуда следует, что $b^{2^n} - 1$ делится на $b^{2^m} + 1$. Но числа $b^{2^n} + 1$ и $b^{2^n} - 1$ взаимно просты.

Лемма 2. *Пусть a — натуральное, а числа p и q взаимно просты. Если r — простое и числа $a^p + 1$ и $a^q + 1$ делятся на r, то $a + 1$ делится на r.*

Доказательство. Если $a > 1$, то натуральные числа $\left(a^2\right)^p - 1$ и $\left(a^2\right)^q - 1$ делятся на r. Значит, $a^2 - 1$ делится на r. Если $a - 1$ делится на r, то $a^p - 1$ делится на r, т.е. $r = 2$. При четном a получили противоречие, а при нечетном — делитель числа $a + 1$. В обоих случаях все в порядке.

Лемма 3. *Пусть $a \ge 2$, p — нечетное простое число и выполнено хотя бы одно из неравенств $a \ne 2$ и $p \ne 3$. Тогда $a^p + 1$ имеет простой делитель, не являющийся делителем числа $a + 1$.*

Доказательство. Рассмотрим разложение

$$a^p + 1 = (a+1)\left(a^{p-1} - a^{p-2} + \ldots + a^2 - a + 1\right) = (a+1)b.$$

Докажем вначале, что числа $a + 1$ и b не могут иметь общего делителя r, отличного от 1 и от p. Действительно, если $a + 1$ делится на r, то и $a^k + 1$ делится на r при любом нечетном k; если же $k = 2m$, то $a^k - 1$ делится на $a^2 - 1$, которое, в свою очередь, делится на r. Значит, $b = rl + p$, где l — некоторое целое число. Поэтому b делится на r лишь при $r = 1$ или p.

Таким образом, для завершения доказательства леммы осталось рассмотреть случай $b = p^n$, $a + 1$ делится на p. Докажем, что этот случай невозможен. Докажем вначале, что, как и в решении пункта а), $b > p$. Имеем:

$$b \ge a^2 - a + 1 \ge a + 1 \ge p.$$

Из условий леммы следует, что среди неравенств этой цепочки есть строгие. С другой стороны, как и в решении пункта а), можно доказать, что b не делится на p^2, — что и завершает доказательство леммы.

Лемма 4. *Пусть $a \ge 2$, m и n нечетны, m не делится на n. Тогда либо $n = 3$ и $a = 2$, либо $a^n + 1$ имеет хотя бы один простой делитель, не делящий $a^m + 1$.*

Доказательство. Обозначим $b = a^{\text{НОД}(m,n)}$ и $k = \dfrac{n}{\text{НОД}(n,m)}$. По лемме 3 либо $b = 2$ и $k = 3$, либо $b^k + 1$ имеет простой делитель q, не делящий $b + 1$. В последнем случае из леммы 2 следует, что q не делит $a^m + 1$.

Займемся теперь непосредственно пунктом б). Предположим противное и рассмотрим три числа в прогрессии, отличных от $2^0 + 1$. Пользуясь равенством $2^x\left(2^{-x} + 1\right) = 1 + 2^x$, приходим к равенству

$$\left(2^b + 1\right)^n = \left(2^a + 1\right)^m \left(2^c + 1\right)^{n-m},$$

где $n > m$. Обозначим $b = 2^{k_1}d$, $a = 2^{k_2}e$, $c = 2^{k_3}f$, где d, e, f нечетны. Из леммы 1 следует, что $k_1 = k_2 = k_3 = k$.

Таким образом,

$$\left(g^d + 1\right)^n = \left(g^e + 1\right)^m \left(g^f + 1\right)^{n-m},$$

где $g = 2^{2^k}$. Обозначим $h = \max\{e,f\}$. По лемме 4 либо $g^h + 1$ имеет простой делитель, не делящий $g^d + 1$, либо $g = 2$ и $h = 3$. В последнем случае $d = 1$ — в противоречии с $\min\{e, f\} < d$.

Замечания. Из наших рассуждений легко получить, что $9/8$, $3/2$ и 2 — единственная тройка чисел, удовлетворяющая условиям пункта б).

Упомянем о некоторых модификациях нашей задачи. Пусть a и b — натуральные взаимно простые числа и $a > b$. Биркгоф и Вандивер, используя свойства многочленов деления круга, доказали в 1902 году, что (кроме одного исключительного случая, о котором сказано ниже) для любого натурального числа $n > 2$ существует простой делитель q разности $a^n - b^n$, не являющийся делителем ни одной разности $a^m - b^m$, где $m < n$. Единственное исключение: $a = 2$, $b = 1$, $n = 6$. Кроме того, существует простой делитель суммы $a^n + b^n$, не являющийся делителем ни одного из чисел вида $a^m + b^m$, где $m < n$. Единственное исключение: $a = 2$, $b = 1$, $n = 3$.

Из теоремы Биркгофа–Вандивера следует, что при замене двойки в условиях задачи любым бо́льшим натуральным числом ответом становится число 2.

Возможны и иные модификации. Так, элементарными методами нетрудно доказать, что пересечение одной целочисленной геометрической прогрессии с ненулевым сдвигом другой — конечное множество. (Число его элементов может быть больше двух. Например, $1 + 3 = 4$, $5 + 3 = 8$ и $125 + 3 = 128$, так что пересечение прогрессии 1, 2, 4, 8, ... со сдвигом прогрессии 1, 5, 25, 125, ... на 3 состоит не менее чем из трех элементов.) Достаточно доказать, что уравнение

$$ab^n + c = de^k,$$

где a, b, c, d, e — натуральные числа, $b > 1$ и $e > 1$, имеет лишь конечное число решений в натуральных числах n и k. Наметим это доказательство. Можно считать, что НОД$(ab, c, de) = 1$. Выберем некоторый простой делитель p числа e и рассмотрим сравнение

$$ab^n + c \equiv 0 \pmod{p^k}.$$

Рассматривая n как функцию от k, нетрудно доказать, что справедливо некоторое неравенство вида

$$n \geq f + gp^k,$$

где g — натуральное число, f — целое. Значит,

$$de^k \geq ab^{f+gp^k} + c.$$

Но функция b^{p^k} растет быстрее, чем e^k. Следовательно, последнее неравенство выполняется лишь при конечном числе натуральных k.

А.Голованов, В.Сендеров

М1868*. *Рассмотрим множество всех квадратных таблиц $p \times p$ клеток ($p > 1$), заполненных натуральными числами 1, 2, ..., p^2. Назовем правильной таблицу, в которой в первой строке (столбце) стоят по порядку числа 1, 2, ..., p, во второй строке (столбце) $p + 1$, $p + 2$, ..., $2p$ и т.д.). Пусть A – подмножество нашего множества таблиц, в котором каждую таблицу можно получить из правильной операциями перестановки столбцов и перестановки строк, B – подмножество, в котором операциями прибавления числа 1 ко всем числам строки или столбца из любой таблицы можно получить таблицу с равными числами. Докажите, что A = B тогда и только тогда, когда p простое.*

1	2	9	10
3	4	11	12
5	6	13	14
7	8	15	16

Рис.1

Будем называть операции перестановки столбцов и перестановки строк операциями типа 1, а операции прибавления числа 1 ко всем числам строки или столбца операциями типа 2.

Во-первых, если число p не является простым, то подмножества A и B не совпадают. Например, при $p = 4$ таблица, показанная на рисунке 1, принадлежит множеству B, но не принадлежит множеству A. Действительно, операциями типа 2 нетрудно получить таблицу с равными числами, но, переставляя столбцы или строки, нельзя получить правильную таблицу, так как при любых перестановках числа 1 и 4 будут стоят в разных строках и разных столбцах. Аналогично можно построить примеры для любого составного числа p.

Во-вторых, множество A — подмножество множества B. Из правильной таблицы операциями типа 1 можно получить таблицу с равными числами. Тогда любую таблицу T из множества A можно превратить в правильную таблицу, в ней сделать все числа равными, а затем переставить столбцы и строки обратно. Это все равно, что проводить операции типа 2, так как они не зависят от расположения строк и столбцов. Значит, таблица T принадлежит множеству B.

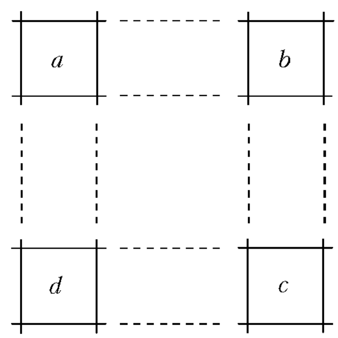


Рис.2

Покажем, что множество B — подмножество множества A. Назовем четверку клеток прямоугольной, если центры этих клеток являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам таблицы. Для любой таблицы множества B верно следующее утверждение.

Лемма 1. *Числа a, b, c и d, стоящие в клетках прямоугольной четверки (как на рисунке 2), удовлетворяют соотношению $a + c = b + d$.*

Для таблицы, в которой все числа равны, утверждение леммы выполнено. Применение операции, обратной операции типа 2, либо оставляет неизменными числа указанной четверки, либо уменьшает на 1 два числа в соседних вершинах прямоугольника, что также сохраняет указанное соотношение. Таким образом, для любой таблицы множества B утверждение леммы 1 верно, так как она получается из таблицы с равными числами операциями, обратными операциям типа 2. Лемма 1 доказана.

Теперь докажем, что если для любой прямоугольной четверки клеток таблицы выполняется утверждение леммы 1 и число p является простым, то в ней можно переставить столбцы и строки так, что получится правильная таблица. Этим будет доказано, что любая таблица множества B принадлежит множеству A, если p — простое число, на чем решение будет завершено.

Алгоритм такой перестановки следующий:

1) переставим столбцы и строки так, чтобы число 1 оказалось в левом верхнем углу;

2) переставим столбцы так, чтобы числа в первой строке шли по возрастанию;

3) переставим строки так, чтобы числа в первом столбце шли по возрастанию.

Докажем, что при этом получится правильная таблица. Число 2 будет соседним с числом 1. Действительно, иначе оно стоит в некоторой клетке, не принадлежащей ни первому столбцу, ни первой строке. Тогда клетки с числами 1 и 2 являются противоположными в некоторой прямоугольной четверке клеток. В оставшихся двух клетках должны стоять числа, сумма которых равна 3, что невозможно. В общем случае верно такое утверждение, которое доказывается аналогично.

Лемма 2. *Пусть известно, какими числами заполнены все клетки какого-то левого верхнего прямоугольника таблицы, n — наименьшее число, не стоящее в этом прямоугольнике. Тогда число n стоит вне прямоугольника в первой же клетке первого столбца или первой строки.*

Пусть число 2 стоит во второй клетке первой строки (случай, когда оно стоит во второй клетке первого столбца, аналогичен). Покажем, что тогда в первой строке стоят числа $1, 2, 3, \ldots, p$.

Пусть это не так и после числа 1 стоит k $(1 < k < p)$ подряд идущих чисел $1, 2, 3, \ldots, k$, а затем стоит число, большее чем $k + 1$.

Тогда число $k + 1$ (согласно лемме 2) может находиться только под числом 1. Следующие $k - 1$ клеток второй строки определяются автоматически: это числа $k + 1$, $k + 2, \ldots, 2k$. Действительно, любая $(k + i)$-я клетка второй строки $(i = 2, 3, \ldots, k)$ является единственной «незаполненной» клеткой какой-то прямоугольной четверки клеток (точнее, четверки с числами 1, $k + 1$, i), поэтому в ней стоит число $x = (k + 1 + i) - 1 = k + i$ (рис.3).

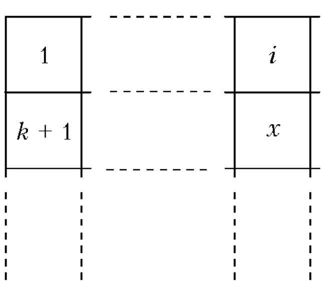


Рис.3

Число $2k + 1$, по лемме 2, стоит либо в первой строке, либо в первом столбце. Если оно стоит в первом столбце, то первые k чисел этой строки также определяются однозначно.

Продолжая так определять числа, придем к тому, что найдется число вида $mk + 1$, которое будет стоять в $(k + 1)$-й клетке первой строки. В крайнем случае, это произойдет, когда определятся все первые k клеток во всех строках. При этом будут определены все числа в верхнем левом прямоугольнике с k столбцами и m строками (в приведенном в начале примере такой блок имеет размеры 2×2).

Узнав положение числа $mk + 1$, можно определить следующее за ним число в первой строке. Это число $mk + 2$. Действительно, оно либо следующее в первой строке, либо $(m + 1)$-е в первом столбце. Если оно стоит в первом столбце, то из леммы 1 следует, что число $mk + k + 1$ должно стоять в этой же строке в $(k - 2)$-й клетке и в то же время в клетке под числом $mk + 1$, что невозможно. Значит, это число стоит в следующей клетке в первой строке за числом $mk + 1$.

Аналогично определятся следующие $k - 2$ числа в первой строке, а далее — следующий прямоугольник с k столбцами и m строками, заполненный числами $mk + 1$, $mk + 2, \ldots, 2mk$. И так далее. Так можно показать, что все числа таблицы расположены блоками одинаковых размеров, каждый из которых занимает k столбцов. Таким образом, ширина таблицы, равная числу p, должна делится на k, что невозможно (p — простое число).

Значит, в первой строке стоят числа $1, 2, \ldots, p$ и, исходя из выше сказанного, определяются все числа таблицы, которая оказывается правильной. Утверждение задачи доказано.

Д.Калинин

М1869. *а) Решите уравнение*

$$\sin^8 x + \frac{1}{\sin^3 x} = \cos^8 x + \frac{1}{\cos^3 x}.$$

б) Пусть $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$, n, m — натуральные, $x^n + \dfrac{1}{x^m} = y^n + \dfrac{1}{y^m}$. Докажите, что

$$x^2 + y^2 > \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{n+m}}.$$

а) **Ответ**: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

Решение. При $\sin x = \cos x$ имеем $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Пусть $\sin x \neq \cos x$. Преобразуя уравнение, получаем $f(x) = g(x)$, где

$$f(x) = \sin^3 x \cos^3 x \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)(\sin x + \cos x),$$

$$g(x) = 1 + \sin x \cos x.$$

Однако

$$|f(x)| \le \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} < \frac{1}{2}, \quad |g(x)| \ge 1 - |\sin x \cos x| \ge \frac{1}{2}$$

(мы воспользовались тем, что

$$|\sin x \cos x| = \left|\frac{1}{2} \sin 2x\right| \le \frac{1}{2},$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \le 2\ ).$$

Противоречие.

В этом решении мы воспользовались разложением на множители выражений $a^8 - b^8 = \sin^8 x - \cos^8 x$ и $a^3 - b^3 = \sin^3 x - \cos^3 x$, а также компактной записью полученных тригонометрических выражений. Наметим теперь более общее, не зависящее от специфики чисел 3 и 8 решение.

Заметим, что числа $\sin x$ и $\cos x$ одного знака. В самом деле, пусть $\cos x > 0$, $\sin x < 0$. Тогда $\sin^8 x = -\dfrac{1}{\sin^3 x} + \ldots > 1$. Случай $\cos x < 0$, $\sin x > 0$ рассматривается аналогично.

Если $\sin x < 0$, $\cos x < 0$, то $\sin x = \cos x$, поскольку при $t < 0$ функция $t^8 + \frac{1}{t^3}$ монотонна.

Пусть теперь $\sin x > 0$, $\cos x > 0$. Из утверждения пункта б) будет следовать, что $\sin x = \cos x$.

б) Пусть x, y − числа задачи, $x^2 + y^2 = a^2$, где $a > 0$. Положим $\sin t = \frac{x}{a}$, где $t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, и перепишем равенство задачи в виде

$$a^{n+m} f(t) = 1,$$

где

$$f(t) = \sin^m t \cos^m t \cdot \frac{\sin^n t - \cos^n t}{\sin^m t - \cos^m t}.$$

Оценим функцию $f(t)$ сверху. Без ограничения общности будем считать $t \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. В этом случае $\sin^{k+2} t - \cos^{k+2} t \le \sin^k t - \cos^k t$ при $k \ge 2$, откуда легко вывести неравенство

$$\sin^n t - \cos^n t < \frac{3}{2}(\sin t - \cos t). \qquad (*)$$

Кроме этого,

$$\frac{\sin^k t \cos^k t}{\sin^k t - \cos^k t} \le \frac{\sin^{k-2} t \cos^{k-2} t}{\sin^{k-2} t - \cos^{k-2} t} \text{ при } k > 2.$$

Отсюда и из очевидного неравенства

$$\frac{\sin^2 t \cos^2 t}{\sin^2 t - \cos^2 t} < \frac{\sin t \cos t}{\sin t - \cos t}$$

получаем

$$\frac{\sin^m t \cos^m t}{\sin^m t - \cos^m t} \le \frac{\sin t \cos t}{\sin t - \cos t}. \qquad (**)$$

Из $(*)$ и $(**)$ следует

$$f(t) < \frac{3}{2} \sin t \cos t < \frac{3}{4}.$$

Отсюда сразу получаем б).

Замечание 1. Как показывает пример $n = 3$, $m = 1$, оценка неравенства б) точна.

Замечание 2. Условие $x > 0$, $y > 0$ в пункте б) существенно. Действительно, уравнение

$$\sin^n t + \cos^n t = \frac{1}{\cos^m t} - \frac{1}{\sin^m t}$$

при любых натуральных m и n имеет решение $t_0 \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, при нечетном n и четном m уравнение

$$\sin^n t - \cos^n t = \frac{1}{\cos^m t} - \frac{1}{\sin^m t}$$

имеет решение $t_1 = \pi - t_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Замечание 3. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа задачи n, m, x, y, что $x^2 + y^2 < 1 + \varepsilon$. Для доказательства этого нужно выбрать $\sin t$ достаточно близким к 1 и воспользоваться очевидным неравенством

$$\left(\sin t \cos t \cdot \frac{\sin^n t - \cos^n t}{\sin t - \cos t}\right)^{\frac{1}{n+1}} \ge \left(\sin t \cos t \cdot \sin^{n-1} t\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

правая часть которого при $n \to \infty$ стремится к $\sin t$.

В.Сендеров

М1870. *а) На плоскости даны точки A, B, C, D общего положения. Известно, что углы между прямыми AB и CD, AC и BD, AD и BC равны. Докажите, что они прямые.*

б) Углы между противоположными ребрами тетраэдра равны. Верно ли, что они прямые?

а) Покажем сначала, что точки A, B, C, D не могут образовывать выпуклый четырехугольник. Пусть стороны AB и CD пересекаются в точке P, AD и BC — в точке Q, диагонали AC и BD — в точке O, причем C лежит на отрезках PD и QB. Тогда $\angle AOB = \angle AQB + \angle QAO + \angle QBO$, $\angle AOD = \angle APD + \angle PAO + \angle PDO$, и условие задачи не может быть выполнено.

Пусть теперь точка D лежит внутри треугольника ABC, A', B', C' — точки пересечения AD, BD, CD с противоположными сторонами треугольника. Если $\angle AA'C = \angle BB'A = \angle CC'B$, то четырехугольники $A'DC'B$ и $B'DC'A$ — вписанные. Значит, $CA' \cdot CB = CD \cdot CC' = CB' \cdot CA$ и точки A, B, A', B' лежат на окружности. Следовательно, $\angle AA'B = \angle BB'A = \pi/2$. Если же равны углы $AA'B$ и $BB'A$, то вписанными будут четырехугольник $AA'B'B$ и один из четырехугольников $BA'DC'$ и $AB'DC'$. Значит, второй из этих четырехугольников также вписанный и его равные углы — прямые.

б) Пусть φ — угол между противоположными ребрами. Рассмотрим описанный параллелепипед тетраэдра. Разность квадратов ребер его граней, диагоналями которых являются ребра AB и CD тетраэдра, равна $AB \cdot CD \cos\varphi$. Аналогичные соотношения выполнены и для других пар ребер. Следовательно, если угол φ не прямой, то сумма произведений двух пар противоположных ребер тетраэдра равна произведению ребер третьей пары. Но это равенство возможно только для 4 точек, лежащих на одной окружности или прямой. Значит, $\varphi = \pi/2$.

А.Заславский

Ф1878. *В вертикальную стену вбиты два гвоздя так, что они лежат на одной вертикальной прямой. Кусок однородной проволоки массой m согнули в дугу в виде половины окружности и шарнирно прикрепили за один из концов к верхнему гвоздю A (рис.1). Дуга при этом оперлась на нижний гвоздь B. Найдите величину силы, с которой проволока действует на верхний гвоздь, если известно, что в отсутствие нижнего гвоздя, когда проволока находится в равновесии, диаметр AC дуги*

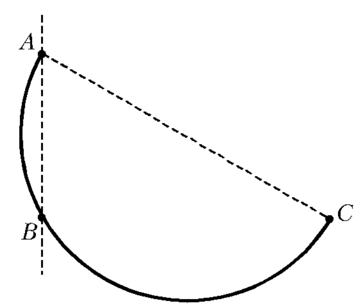


Рис.1

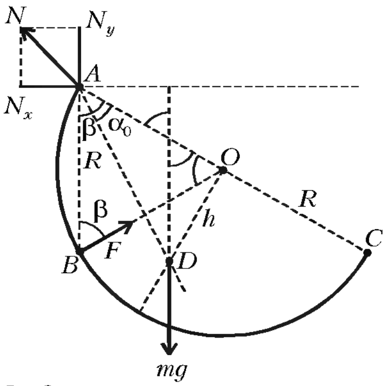


Рис.2

составляет с вертикалью угол α_0. Расстояние между гвоздями равно радиусу дуги. Трения нет.

Обозначим радиус дуги через R, силы реакции, действующие на проволоку со стороны верхнего и нижнего гвоздей, – через N и F соответственно, а расстояние OD от центра окружности, частью которой является дуга, до центра масс проволочной фигуры – через h (рис. 2). Отметим, что центр масс фигуры лежит на оси симметрии. Так как проволока гладкая, то сила F направлена к центру указанной окружности. Введем координатные оси X – горизонтальную и Y – вертикальную и запишем условия равновесия проволоки:

$$N_x = F\sin\beta,$$

$$N_y + F\cos\beta = mg,$$

$$FR\sin\beta = mg(R - h\,\mathrm{ctg}\,\beta)\sin\beta.$$

Здесь N_x и N_y – проекции силы $\vec{N}$ на координатные оси, $\beta = \pi/3$ – угол между вертикалью и диаметром AC при наличии нижнего гвоздя. При отсутствии нижнего гвоздя, когда проволока находится в положении равновесия, ее центр масс лежит на вертикальной прямой, проходящей через верхний гвоздь. Следовательно,

$$h = R\,\mathrm{tg}\,\alpha_0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$F = mg\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_0}{\sqrt{3}}\right),$$

$$N_x = \frac{mg\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_0}{\sqrt{3}}\right),$$

$$N_y = \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_0}{\sqrt{3}}\right).$$

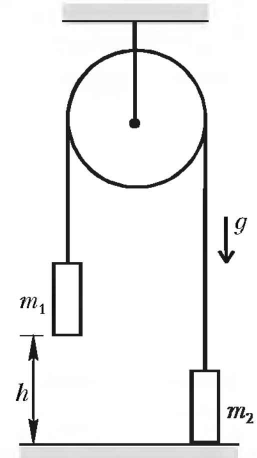
Искомая сила $\vec{T}$, с которой проволока действует на верхний гвоздь, равна по величине силе $\vec{N}$ и противоположна ей по направлению. Таким образом,

$$T = N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = mg\sqrt{1 - \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_0}{\sqrt{3}} + \frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha_0}{3}}.$$

Заметим, что заданный в условии задачи угол α_0 составляет вполне определенную, не зависящую от параметров дуги, величину, которую нельзя вычислить, находясь в рамках школьной математики (на самом деле $\mathrm{tg}\,\alpha_0 = 2/\pi$). Поэтому полученный ответ можно не исследовать – содержащаяся под корнем величина заведомо положительна.

А.Якута

Ф1879. *В машине Атвуда (см. рисунок) массы грузов равны m_1 и m_2, блок и нить невесомы, трение отсутствует. Вначале более тяжелый груз массой m_1 удерживают на высоте h над горизонтальной плоскостью, а груз массой m_2 стоит на этой плоскости, причем отрезки нити, не лежащие на блоке, вертикальны. Затем грузы отпускают без начальной скорости. Найдите, на какую максимальную высоту поднимется первый груз после абсолютно неупругого удара о плоскость, если нить можно считать гибкой, неупругой и практически нерастяжимой. Ускорение свободного падения равно g, блок находится достаточно далеко от грузов.*



Так как нить нерастяжима, то величины ускорений обоих грузов одинаковы. Поскольку блок и нить невесомы и трение отсутствует, то сила натяжения T вдоль всей нити одна и та же. Направим координатную ось вниз и запишем уравнения движения грузов с учетом того, что $m_1 > m_2$:

$$m_1 a = m_1 g - T,$$

$$-m_2 a = m_2 g - T.$$

Отсюда находим

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

В момент касания первого груза плоскости оба груза разгонятся до скорости

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}.$$

После этого груз массой m_1 остановится (так как удар о плоскость абсолютно неупругий), а груз массой m_2 полетит вверх с начальной скоростью v и ускорением $\vec{g}$, направленным вниз. Через некоторое время, достигнув максимальной высоты, этот груз начнет свободно падать с ускорением $\vec{g}$ и в некоторый момент снова натянет нить. В этот момент его скорость будет по величине той же, что и в начале полета, но направлена она будет уже вниз. Поскольку нить неупругая, а блок невесомый, скорости обоих грузов после рывка выровняются. В соответствии с законом сохранения импульса, можно записать

$$m_2 v = (m_1 + m_2) v_1,$$

откуда начальная скорость движения первого груза вверх (а второго груза вниз) будет равна

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Ускорение грузов при дальнейшем их движении будет прежним, т.е. равным a, а максимальная высота подъема первого груза составит

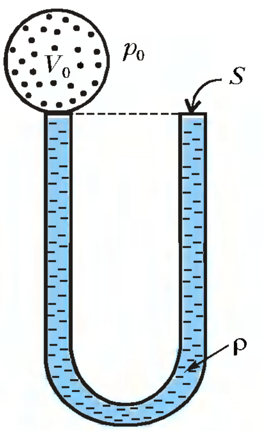
$$h_1 = \frac{v_1^2}{2a} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot 2gh\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{2g(m_1 - m_2)} =$$

$$= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 h = \frac{h}{(1 + m_1/m_2)^2}.$$

При дальнейшем движении в системе будут происходить те же самые процессы, но после каждого следующего удара о плоскость высота подъема первого груза будет уменьшаться в $(1+m_1/m_2)^2$ раз, так что h_1 действительно является искомой максимальной высотой подъема.

М.Семенов

Ф1880. *В установленной вертикально U-образной трубке площадью S с внутренним объемом V_0 находится жидкость плотностью ρ (см. рисунок). Колена трубки одинаковы по высоте, одно из них открыто в атмосферу, а второе герметично соединено с сосудом объемом V_0, внутри которого находится идеальный одноатомный газ. Жидкость заполняет всю U-образную трубку. Найдите количество теплоты, которое необходимо сообщить газу в сосуде для того, чтобы медленно вытеснить из трубки половину жидкости. Атмосферное давление постоянно и равно p_0. Давлением паров жидкости, поверхностным натяжением и потерями тепла пренебречь. Радиус полукруглого участка трубки, соединяющего ее колена, считать много меньшим высоты трубки.*



Для того чтобы жидкость вытеснялась из трубки медленно, газ также нужно нагревать очень медленно, регулируя количество подводимого тепла так, чтобы вытекающая жидкость в течение всего процесса не приобретала кинетической энергии. При этом все сообщаемое газу тепло будет уходить на изменение его внутренней энергии и на совершение им работы по расширению.

В начальном состоянии газ находится под атмосферным давлением p_0 и имеет некоторую температуру T_0. Пренебрежем объемом и высотой столба жидкости, находящейся в полукруглом участке трубки. Тогда длина трубки будет равна V_0/S. Следовательно, в конечном состоянии объем газа увеличится до $V_1 = 3V_0/2$, его давление станет $p_1 = p_0 + \rho g \frac{V_0/S}{2}$, а температура изменится до некоторой величины T. Запишем уравнение Клапейрона для начального и конечного состояний газа:

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{\left(p_0 + \frac{\rho g V_0}{2S}\right)\frac{3V_0}{2}}{T}.$$

Отсюда, с учетом уравнения состояния $p_0V_0 = \nu RT_0$, получим

$$T - T_0 = \frac{T_0}{p_0V_0}\left(\frac{3p_0V_0}{2} + \frac{3\rho g V_0^2}{4S} - p_0V_0\right) = \frac{1}{\nu R}\left(\frac{p_0V_0}{2} + \frac{3\rho g V_0^2}{4S}\right).$$

Таким образом, температура газа в течение процесса увеличится, и его внутренняя энергия возрастет на величину

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T - T_0) = \frac{3p_0V_0}{4} + \frac{9\rho g V_0^2}{8S}.$$

Найдем теперь работу, совершаемую газом при расширении. Она пойдет на увеличение потенциальной энергии жидкости и на совершение работы против силы атмосферного давления. Примем уровень основания трубки за начало отсчета потенциальной энергии. Тогда в начальном состоянии потенциальная энергия находящейся в трубке жидкости равна

$$E_1 = \rho V_0 g \frac{V_0}{4S} = \frac{\rho g V_0^2}{4S}.$$

После того как половина жидкости вытечет из трубки (а это означает, что она будет поднята на высоту $\frac{V_0/S}{2}$), потенциальная энергия жидкости станет равной

$$E_2 = \frac{\rho V_0}{2} g \frac{V_0/S}{4} + \frac{\rho V_0}{2} g \frac{V_0/S}{2} = \frac{3\rho g V_0^2}{8S}.$$

Работа против постоянной силы атмосферного давления, совершенная при вытеснении жидкости из трубки, равна

$$A_0 = p_0 \frac{V_0}{2}.$$

Следовательно, полная работа, совершаемая газом при расширении, составляет

$$A = E_2 - E_1 + A_0 = \frac{3\rho g V_0^2}{8S} - \frac{\rho g V_0^2}{4S} + \frac{p_0V_0}{2} = \frac{\rho g V_0^2}{8S} + \frac{p_0V_0}{2}.$$

Искомое количество теплоты теперь можно определить при помощи первого начала термодинамики:

$$Q = \Delta U + A = \frac{5}{4}V_0\left(p_0 + \frac{\rho g V_0}{S}\right).$$

А.Якута

Ф1881. *Что покажет каждый из трех одинаковых амперметров A_1, A_2 и A_3 в схеме, изображенной на рисунке 1, при подключении клемм A и B к источнику с напряжением U = = 3,3 В? Сопротивления амперметров много меньше сопротивлений резисторов.*

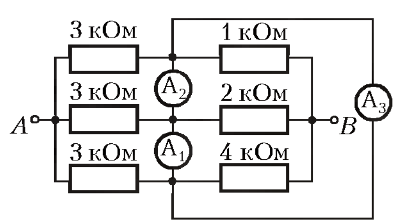


Рис.1

Так как сопротивления амперметров много меньше сопротивлений резисторов, потенциалы точек, к которым подключены амперметры, можно считать одинаковыми. Тогда схему можно перерисовать так, как

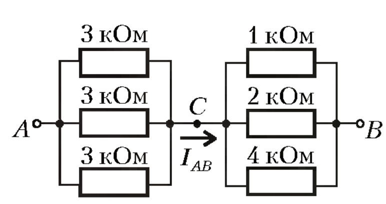


Рис. 2

показано на рисунке 2. В ней сопротивление между точками A и C равно

$$R_{AC} = \frac{1}{3} \cdot 3 \text{ кОм} = 1 \text{ кОм},$$

а между точками C и B –

$$R_{CB} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^{-1} \text{ кОм} = \frac{4}{7} \text{ кОм}.$$

Поэтому сопротивление между точками A и B составляет

$$R_{AB} = \frac{11}{7} \text{ кОм},$$

и суммарный ток в цепи равен

$$I_{AB} = \frac{U}{R_{AB}} = 2{,}1 \text{ мА}.$$

При этом напряжение между точками A и C равно

$$U_{AC} = I_{AB} R_{AC} = 2{,}1 \text{ В},$$

а между точками C и B –

$$U_{CB} = I_{AB} R_{CB} = 1{,}2 \text{ В}.$$

Поэтому токи, текущие через каждый из резисторов с сопротивлением 3 кОм, равны $I_3 = 0{,}7$ мА, а через остальные резисторы с сопротивлениями 1 кОм, 2 кОм и 4 кОм равны $I_1 = 1{,}2$ мА, $I_2 = 0{,}6$ мА и $I_4 = 0{,}3$ мА. Перерисуем теперь исходную схему еще раз – теперь уже с учетом амперметров (рис.3). В каждой из точек соединения проводов сумма токов должна равняться

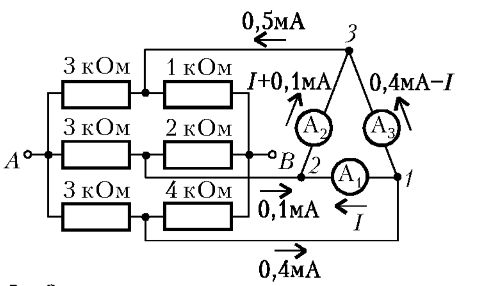


Рис.3

нулю. Поэтому в точку между резисторами с сопротивлениями 3 кОм и 1 кОм должен втекать ток, равный $I_1 - I_3 = 0{,}5$ мА, из точки между резисторами с сопротивлениями 3 кОм и 2 кОм должен вытекать ток, равный $I_3 - I_2 = 0{,}1$ мА, а из точки между резисторами с сопротивлениями 3 кОм и 4 кОм должен вытекать ток $I_3 - I_4 = 0{,}4$ мА. Обозначим ток, текущий через амперметр A_1, через I. Тогда ток через амперметр A_2 будет равен I + 0,1 мА, а через A_3 будет 0,4 мА – I. Обозначим малое сопротивление каждого амперметра через R и найдем

$$U_{13} = (0{,}4 \text{ мА} - I)R = U_{12} + U_{23} = IR + (I + 0{,}1 \text{ мА})R,$$

I = 0,1 мА, I + 0,1 мА = 0,2 мА, 0,4 мА – I = 0,3 мА.

Итак, амперметр A_1 покажет ток 0,1 мА, амперметр A_2 – ток 0,2 мА и амперметр A_3 – ток 0,3 мА.

О.Шведов

Ф1882. *Путнику, возвращавшемуся темной ночью домой в свою деревню по дороге, идущей прямо к его дому, с расстояния r = 5 км стал виден огонек свечи в одном из окон. Внутри дома вблизи соседнего окна стоит наряженная к Новому году елка с зеркальными шарами. Оцените, на каком расстоянии от дома путнику станет видно отражение свечи в елочном шаре диаметром D = 10 см, если он идеально отражает свет и находится на расстоянии d = 1,8 м от свечи на линии, перпендикулярной дороге. Окна одинаковые, свеча горит ровно.*

Свечу S (см. рисунок), как и ее отражение S', при наблюдении с большого расстояния можно считать точечным источником, равномерно излучающим свет во все стороны. Лучи от свечи, находящейся на расстоянии r от человека, расходятся под углом $\Delta\alpha \approx d/r$, где d – диаметр зрачка глаза. Очевидно, что лучи, испущенные свечой в пределах такого угла, после отражения от шарика будут расходиться уже под бóльшим углом $\Delta\varphi$, и все попадут в глаз (т.е. в пределы зрачка) на гораздо меньшем расстоянии r_1 от свечи: $d = r\Delta\alpha = r_1\Delta\varphi$.

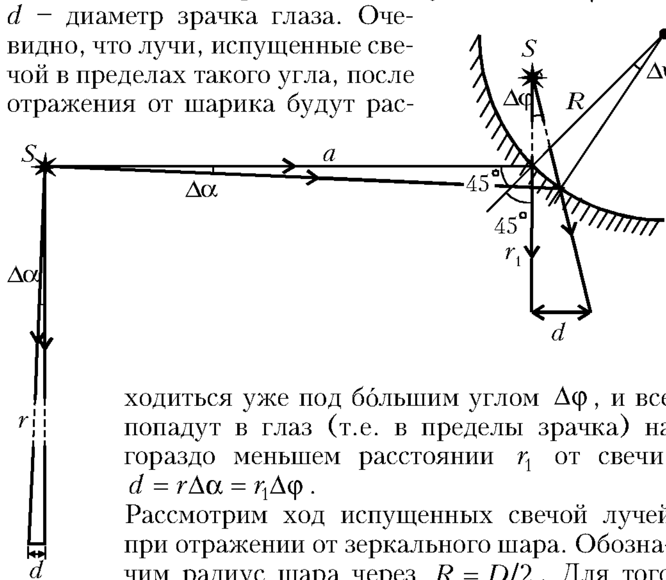


Рис.1

Рассмотрим ход испущенных свечой лучей при отражении от зеркального шара. Обозначим радиус шара через $R = D/2$. Для того чтобы путник увидел отражение свечи в шаре, угол падения лучей на его зеркальную поверхность должен быть близок к 45°. Поэтому расстояние между точками падения двух лучей, расходящихся из свечи под углом $\Delta\alpha$, на поверхности шара будет равно $a\Delta\alpha/\cos 45^\circ = R\Delta\psi$, где $\Delta\psi$ – угол поворота отражающей поверхности между этими точками. Отсюда $\Delta\psi = \sqrt{2}a\Delta\alpha/R$.

Известно, что при повороте луча, падающего на плоское зеркало, на угол $\Delta\alpha$ отраженный луч поворачивается тоже на $\Delta\alpha$, а при повороте самого зеркала на угол $\Delta\psi$ луч поворачивается на угол $2\Delta\psi$. Таким образом,

$$\Delta\varphi = 2\Delta\psi + \Delta\alpha = \left(\frac{2\sqrt{2}a}{R} + 1\right)\Delta\alpha,$$

и

$$r_1 = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\varphi} r = \frac{r}{2\sqrt{2}a/R + 1} = \frac{r}{4\sqrt{2}a/D + 1} \approx 48{,}6 \text{ м}.$$

Поскольку $4\sqrt{2}a/D \approx 100 \gg 1$, ответ можно записать и так:

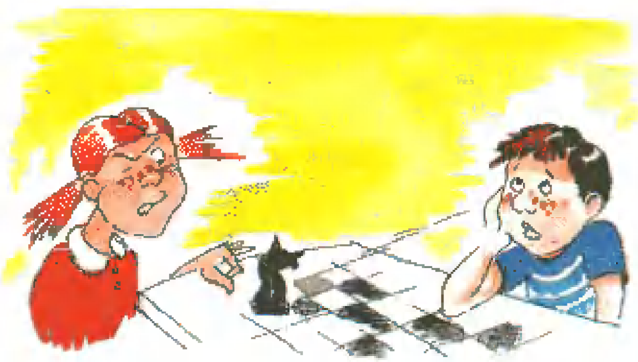
$$r_1 \approx \frac{rD}{4\sqrt{2}a} \approx 50 \text{ м}.$$

М.Семенов

Задачи

1. На шахматной доске стоят фигуры. Когда Аня подсчитала количества фигур, стоящих на каждой из вертикалей, у нее все числа получились разными. Андрей подсчитал количества фигур, стоящих на каждой из горизонталей. Могло ли оказаться так, что ни одно из чисел, полученных Андреем, не совпало ни с одним из чисел, полученных Аней?

И. Акулич



2. Произведение пяти чисел не равно нулю. Каждое из этих чисел уменьшили на единицу, при этом произведение не изменилось. Приведите пример таких чисел.

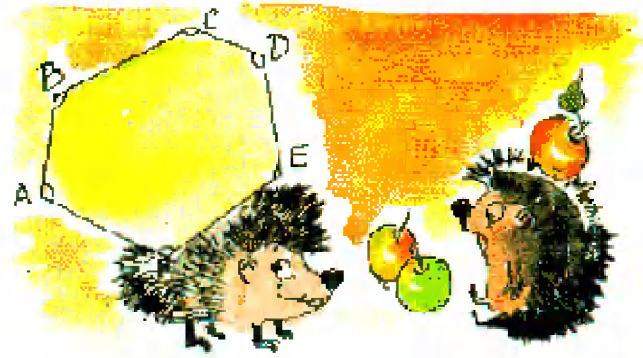
Д.Калинин

3. В выпуклом шестиугольнике *ABCDEF*

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F .$$

Докажите, что две противоположные стороны шестиугольника параллельны.

В.Произволов



4. Прокрустик полагает, что из любого неравнобедренного треугольника можно получить прямоугольный треугольник, увеличив все его стороны на одну и ту же величину либо уменьшив все его стороны на одну и ту же величину. Прав ли Прокрустик?

В.Сендеров

5. На съезд партии умеренного прогресса собрались 100 делегатов, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Первое же заседание по одному покинули 60 делегатов, каждый из которых после выхода из зала объявил журналистам: «Среди оставшихся там лжецов больше, чем правдивых». Сколько всего лжецов среди делегатов съезда?

И.Акулич

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Докажите, что существует сколь угодно много натуральных чисел a, b, c, d таких, что

$$a^2+b^3+c^4=d^5.$$

С.Дворянинов

12. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр натурального числа n. Найдите все натуральные числа n такие, что

$$S(n)\bigl(S(n)+1\bigr)=n.$$

А.Зайчик

13. Используя только циркуль, разделите заданный квадрат на две части одинаковой площади.

И.Акулич

14. Докажите, что всегда найдутся такие натуральные числа K и N, $K \ne N$, что, какое бы ни было натуральное число M,

K делится на N,
$K+1$ делится на $N+1$,
. . .
$K+M$ делится на $N+M$.

В.Замков

15. Имеется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов. Строки могут различаться по высоте, а столбцы – по ширине. Мы можем указать несколько клеток таблицы, и в эти клетки запишут площадь каждой из них.

Какое наименьшее число клеток мы можем указать, чтобы после их заполнения мы могли однозначно определить площади всех остальных клеток таблицы?

И.Акулич

Кодовый замок

В.МАХРОВА

...В ЖИЗНИ КАЖДОГО МАЛЬЧИШКИ НАСТУПАЕТ ПЕРИОД, когда он хочет найти клад. Том Сойер, правда, однажды уже отыскал сокровища, но последние слухи, охватившие сонный городок Сент-Питерсберг, вновь пробудили в нем жажду кладоискательства. Дело в том, что некие залетные гангстеры, ограбившие банк где-то на Среднем Западе, попытались спрятаться именно в Сент-Питерсберге, но были схвачены полицией. Однако украденного сейфа с драгоценностями (а они утащили из банка небольшой сейф, в котором, по слухам, было целое состояние) при гангстерах не оказалось.

Том немедленно предположил, что драгоценности спрятаны где-то поблизости, и отправился искать закадычного друга Гекльберри Финна. Гек, как всегда, отдыхал в старой бочке, покуривая трубочку из кукурузного початка. Услышав о кладе, он мысленно застонал, уже представив себе, как придется потрудиться, размахивая лопатой. А трудиться Гек не очень-то любил.

– Да нет же, Гек, – сказал Том, – копать мы не будем. Понимаешь, у Черного Билла не было времени прятать сейф куда-то далеко, они с Коротышкой Сэмом только появились в трактире, и их сразу сцапали. Думаю, они оставили его где-нибудь в лесу у западного тракта. Вставай, пошли искать.

– А что мы будем делать с драгоценностями? – спросил Гек. – Понимаешь, я теперь и так богат, и вдова Дуглас совсем замучила меня школой и хорошими манерами.

– Ну, от того, что ты станешь еще богаче, она вряд ли будет заставлять тебя умываться еще чаще, – заметил Том. – Зато мы можем здорово помочь шерифу. Представляешь, если он даст нам пострелять из пистолета? И потом, мы прославимся на весь штат, если обставим в этом деле полицию.

— Может, даже в газете про нас напишут... — задумчиво протянул Гек.

— Конечно, напишут! Гекльберри Финн и Томас Сойер, молодые помощники шерифа из Сент-Питерсберга... — Том понял, что друг клюнул на приманку.

— Ладно, пошли, — сказал Гек и выбрался из бочки.

Сейф оказался в небольшой канаве в ста ярдах от дороги. Гангстеры всего-навсего закидали его ветками. Правда, нашли его мальчики после трех дней непрерывных поисков, когда им уже начало надоедать это дело. Сейф был совсем невелик, но очень тяжел, и Том с Геком еле дотащили его до заброшенного сарая у самых границ участка Роджерсов. Хотели было сразу бежать к шерифу, но тут Том заметил на облупленной дверце, которую явно пытались ковырять то ли ножом, то ли ломом, небрежно нацарапанную надпись: «Код — кол. алм. и изум. Алм. и изум. больше 53, изум. больше чем на 4, ушест. изум. больше чем учетв. алм. меньше чем на 81».

— Что это, Гек, как ты думаешь? — спросил Том, с трудом разобрав надпись.

— Ну, код — это, наверное, код замка... Слушай, а если Билл и Сэм знали код, зачем они волокли сейф в такую даль?

— Нет, Гек, они, видно, кода не знали. Тут какая-то головоломка. Смотри — код зашифрован: «Код — количество алмазов и изумрудов». Это ясно. «Алмазов и изумрудов больше 53». Это тоже понятно — всего камней больше 53 штук. А вот дальше... «Изумрудов больше чем на 4». Что это значит?

— Наверное, изумрудов больше, чем алмазов, на 4 штуки?

— Нет, больше чем на 4... Так, а ушестеренное количество изумрудов больше учетверенного количества алмазов, причем разница меньше 81.

— Если мы сосчитаем, сколько там внутри камней, мы что же — сможем открыть сейф?

— Похоже на то, Гек... А знаешь, попробуем-ка мы сами разобраться с кодом! Если сейф попадет к шерифу, мы толком и не поглядим на алмазы. Ты когда-нибудь видел настоящий алмаз?

— Я и изумруда никогда не встречал, — хмыкнул Гек. — Мой папаша почему-то не оставил мне драгоценных камней. У него и доллар-то никогда не задерживался дольше пяти минут, сам знаешь.

— Ну, тогда давай разгадывать головоломку! — и Том, вытащив из кармана перочинный ножик, написал на земляном полу сарая:

$$а + и > 53,$$
$$и - а > 4,$$
$$6и - 4а < 81.$$

— Ох, Том, — печально сказал Гек, — это похоже на арифметику. Не люблю я арифметики, Том, хуже только проповеди в воскресной школе.

— Не очень-то и я ее люблю, да делать нечего, — вздохнул Том. — Хочешь поглядеть на камни — придется заняться арифметикой.

Он долго смотрел на свою запись, потом добавил еще строчку:

$$2и > 57.$$

— Кое-что начинает проясняться, Гек! Изумрудов больше 28!

— Почему?

— Потому что пол-изумруда не бывает, а выходит, что их больше двадцати восьми с половиной. Их может быть 29, 30, а может, еще больше... Так, а алмазов? Если изумрудов 29, то алмазов не меньше 25... А если 30, то может быть и 24... Нет, мало мы пока узнали, Гек! — и Том снова задумался.

Через полчаса Геку надоело ждать, и он предложил лучше пойти искупаться. Том, который сильно утомился, напрягая мозги, немедленно согласился.

— А сейф пока чем-нибудь прикроем, никто не будет его здесь искать. Только, Гек, поклянись, что никому не скажешь!

В летний день у мальчишек всегда находится тысяча неотложных дел, так что Том вспомнил о головоломке только к вечеру. Достал обрывок бумаги, карандаш и снова написал те же неравенства. Что с ними делать, было непонятно. Промучившись над задачей минут сорок, Том сдался и пошел советоваться со старшей сестрой.

Мэри очень удивилась, что ее братишка в кои-то веки пытается решить что-то по арифметике, но помочь ничем не смогла.

— Мы таких задачек никогда не решали, — сказала она Тому. — Откуда ты ее взял?

Но на этот вопрос Тому вовсе не хотелось отвечать, так что пришлось срочно сочинять какую-то историю. Вышла она не слишком складной, и Мэри сразу догадалась, что брат темнит, но расспрашивать не стала.

Раз никто не мог помочь Тому в этом трудном деле, он, вздохнув, принялся за него сам. Тетя Полли сначала только хмыкала, видя его с карандашом и старой тетрадкой, потом забеспокоилась — не заболел ли ребенок? Не хулиганит, не дразнит Сида, не удирает на реку, сидит и что-то черкает в тетради! Чудеса!

Между тем третье неравенство приняло новый вид:

$$а > (6и - 81)/\ 4,$$

и тут Тома осенило:

$$и - 4 > (6и - 81)/\ 4,$$

$$4и - 16 > 6и - 81,$$

$$2и < 65.$$

— Ура! — тихо сказал Том, выводя, наконец, условия на количество изумрудов:

$$28 < и < 33.$$

— Значит, $и = 29, 30, 31$ или 32. Все равно многовато. Поглядим-ка, сколько же там алмазов ...

Теперь дело пошло быстрее: Том написал такое же неравенство для а, получилось

$$(4а + 81)/6 > 53 - а,$$

откуда

$$а > 23{,}7,$$

т.е. $а > 23$, так что вышло $23 < а < 29$. Значит, $а = 24, 25, 26, 27$ или 28. К сожалению, ответов все равно было слишком много.

Тут за забором раздался пронзительный свист, и Том отвлекся. Разумеется, это пришел Гек.

— Чем ты тут занят? — поинтересовался он.

— Арифметикой, — многозначительно подмигнув, ответил Том.

— Ну и как?

— Да вот — слишком много вариантов получается. Пойдем куда-нибудь в укромный уголок, расскажу.

— Лучше купаться, заодно и расскажешь.

Оглядевшись по сторонам — не видит ли тетя Полли? — Том перелез через забор к Геку, и они отправились на реку. «Наконец-то побежал гулять, — подумала тетя Полли, провожая мальчишек взглядом из-за занавески. — Выздоравливает...»

Когда Том изложил Геку результаты своих вычислений, тот вытащил свою трубку, закурил (чтобы лучше думалось) и сказал:

— Слушай, если изумрудов 29, а алмазов 28, то разница меньше четырех.

— Точно! — обрадовался Том. — Если изумрудов 29, то алмазов может быть только 24... А что у нас там с учетверенным количеством?

— Погоди ты учетверять, — прервал его Гек. — Если их 29 и 24, то это ровно 53. Не подходит.

— Верно говорят, что две головы лучше... Кстати, не годятся 28 и 32 — разница ровно 4.

— Значит, изумрудов либо 30, либо 31.

— А если их 31, то алмазов 24, 25 или 26... Придется все-таки учетверять...

Но оказалось, что не так уж это сложно, и не успел Гек выкурить свою трубку, как ответ нашелся: 30 изумрудов и 25 алмазов.

Быстро натянув штаны, мальчики помчались к сараю, повторяя на ходу, чтобы не забыть: «Двадцать пять и тридцать... Двадцать пять и тридцать...»

У сарая дежурил полицейский. Изнутри раздавались голоса. Том и Гек круто притормозили.

— Привет, ребята, — добродушно сказал полицейский. — Уже разузнали о нашей находке?

— Какой находке? — растерянно спросил Том.

— Да старик Джонсон нашел тут нынче утром одну вещицу, которой обыскался весь штат... Слыхали о сейфе? Так он оказался здесь, в сарае, лежал себе, прикрытый тряпицей. И когда Билл с Сэмом успели его сюда припрятать?

...Сейф вскрыли в полиции при помощи слесаря. Ни изумрудов, ни алмазов в нем не оказалось — все больше какие-то скучные ценные бумаги. А тяжелый он был сам по себе — железный, как-никак...

— Слушай, Том, — сказал Гек, узнав об этом. — Выходит, зря мы с тобой, как проклятые, решали задачу?

— Выходит, зря... — вздохнул Том.

— Да ну их, эти дурацкие алмазы, Том. На что они нам? Пойдем-ка лучше с Джимом Тайлером на рыбалку, он хвастал, что у него есть такая мушка — рыба аж из воды выпрыгивает!

Литературная обработка А.Котовой

Некоторые наблюдения над простыми числами

Б.СТЕЧКИН

НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО НАЗЫВАЮТ *ПРОСТЫМ*, ЕСЛИ ОНО больше единицы и делится нацело лишь на единицу и само себя. Первые простые числа таковы: 2,3, 5,7,11,13,17,19, 23,… Числа, не являющиеся простыми, называются *составными*. Одна из основных теорем арифметики утверждает, что *любое составное число однозначно, с точностью до перестановки сомножителей, разлагается в произведение простых*. Более двух тысячелетий люди интересуются свойствами простых чисел. Первая теорема о простых числах содержится в «Началах» Евклида (III в. до н.э.). Там доказано, что *простых чисел бесконечное число*. Действительно, если бы простых чисел было конечное число: $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots,$ p_N, то надо было бы рассмотреть число $p_1 p_2 p_3 \ldots p_N + 1 = q$. По основной теореме арифметики, если допустить, что q – составное, оно должно было бы делиться на какое-то простое число, т.е. на одно из чисел $\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$, но оно не делится ни на одно из них. Противоречие.

На протяжении многих веков люди пытались найти «формулу простых чисел», т.е. такое выражение $f(n)$, которое при подстановке в него вместо n натуральных чисел 1, 2, 3,… перебирало бы простые числа и только их. Были найдены некоторые простые выражения, которые давали много простых чисел.

Например, Эйлер указал на многочлен $f(n) = n^2 + n + 41$. Тогда $f(1) = 43$, $f(2) = 47$ и т.д. вплоть до $f(39)$, ибо $f(40) = 41^2$.

В то же время немецкий математик Дирихле доказал, что во всякой арифметической прогрессии вида $a + nd$, где a и d – взаимно простые числа, содержится бесконечно много простых чисел. Эта теорема по праву считается одним из шедевров теории чисел.

Упражнение 1. Докажите, что никакой многочлен $f(x)$ не может принимать простые значения при всех целых значениях $x = n$.

Формулу для простых чисел выписал наш соотечественник и современник Ю.И.Матиясевич.

Родоначальником теории чисел был великий французский математик Ферма (1601–1665). Он почти не оставил после себя никаких доказательств, но во многих случаях писал своим корреспондентам, что располагает ими. Так, он утверждал, что умеет доказывать такой факт: простое число представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда оно при делении на 4 имеет в остатке единицу. Например, $5 = 2^2 + 1$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 4^2 + 1$, а 7, 11, 19 не представимы в виде суммы двух квадратов. (Доказательство этой теоремы см. в журнале «Квант» №10 (с. 9) за 1991 год.)

Постепенно все утверждения Ферма, про которые он писал, что располагает их доказательствами, были действительно доказаны. Кроме одного – Великой теоремы Ферма. Но и она, наконец, была доказана в 1993 году английским математиком Э.Уайлсом. Ферма принадлежало также несколько гипотез о простых числах, основанных на наблюдениях за их поведением. Так, например, он, исходя из того, что $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$ – простые числа, выдвинул гипотезу, что все такие числа простые. Но это оказалось неверным: Эйлер обнаружил, что число $2^{2^5} + 1$ делится на 641.

На рубеже XVIII и XIX веков Гаусс обнаружил, что простые числа Ферма связаны с задачей о построении циркулем и линейкой правильных многоугольников. Именно, он доказал, что правильный N-угольник может быть построен циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $N = 2^k \cdot p_1 p_2 \ldots p_l$, где p_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ – различные простые числа Ферма. Так могут быть построены, например, правильные 3-, 5-, 15-, 17-, 105-угольники и не могут быть построены 7-, 9-, 11-, … - угольники. Несмотря на достаточно энергичные попытки, до сих пор не найдено ни одного простого числа Ферма, отличного от первых пяти, так что неизвестно, конечно или бесконечно количество правильных многоугольников с простыми числами сторон, которые могут быть построены.

Французский математик Бертран (1822–1900) сделал такое наблюдение: *между числами n и $2n - 2$ при $n \ge 4$ лежит по крайней мере одно простое число*. Он выдвинул гипотезу о том, что это всегда так. Эта гипотеза получила название постулата Бертрана. Постулат Бертрана был доказан великим русским математиком П.Л.Чебышёвым (1821–1894). Давным-давно было замечено, что простые числа иногда отстоят друг от друга на 2 (а два подряд идущих числа, кроме пары 2, 3, не могут быть оба простыми): таковы числа 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13 … Такие числа называют *близнецами*. Из этого наблюдения возникла гипотеза: *близнецов бесконечно много*. Она не доказана по сей день. В то же время существует сколь угодно длинный промежуток натурального ряда, не содержащий простых чисел. Например, среди n чисел $(n+1)! + 2$, $(n+1)! + 3$, …, $(n+1)! + n + 1$ нет ни одного простого числа.

Упражнения

2. Найдите все простые числа p, для которых числа $p + 2$ и $p + 4$ – тоже простые.

3. Найдите арифметическую прогрессию длины 6, состоящую из простых чисел.

4. Докажите, что если существует арифметическая прогрессия длины 15, состоящая из простых чисел, то разность этой прогрессии больше 30000.

Наблюдения за поведением простых чисел показывают, что между квадратами простых чисел всегда имеются близнецы:

$$4 < 5 < 7 < 9,$$

$$9 < 11 < 13 < 25,$$

$$25 < 29 < 31 < 49$$

и т.д. Это порождает гипотезу (ее, в подражание Бертрану, называют постулатом близнецов): *между квадратами простых чисел всегда найдутся близнецы.* Она, разумеется, не доказана, ибо из нее следовало бы, что близнецов бесконечно много.

Очень давно математиков заинтересовал вопрос о том, какова доля простых чисел среди всех чисел. Наблюдая за простыми числами, французский математик Лежандр (1752–1833) высказал гипотезу, что *доля простых чисел, меньших числа x, примерно равна* $x/\ln x$.

Первый шаг к доказательству этой гипотезы сделал опять-таки П.Л.Чебышёв, доказавший, что *число* $\pi(x)$ *простых чисел, меньших x, заключено в пределах между* $C_1\dfrac{x}{\ln x}$ *и* $C_2\dfrac{x}{\ln x}$ (где C_1 и C_2 – некоторые положительные константы). (О теореме Чебышёва см. в журнале «Квант»№6 (с. 12) за 1982 год.)

А в 1896 году французский математик Адамар (1865–1963) и бельгийский математик Валле-Пуссен (1866 – 1962) доказали, что

$$\lim_{x\to\infty}\pi(x):\frac{x}{\ln x}=1,$$

и тем подтвердили гипотезу Лежандра. Из этого результата, в частности, вытекает, что если складывать подряд числа, обратные к простым: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$, то можно получить сколь угодно большое число. А вместе с тем норвежским математиком Бруном было доказано, что если складывать числа, обратные к близнецам, то все суммы

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right)$$

ограничены и не превосходят некоторого числа B. При этом вычислены первые десятичные знаки этого числа, называемого константой Бруна: B = 1,902160758...

Хорошо известен следующий критерий простоты (теорема Вильсона): *число p является простым тогда и только тогда, когда оно нацело делит* $(p-1)!+1$.

Древнекитайские математики, наблюдая за простыми числами, полагали, что верен и другой критерий: *число n – простое тогда и только тогда, когда* 2^n-2 *делится на n.* Они проверили этот факт вплоть до n = 300 и лишь немного не дошли до первого исключения: составное число $341=11\cdot31$ делит нацело число $2^{341}-2$. Но в одну сторону гипотеза древнекитайских математиков верна, ибо имеет место теорема Ферма: *если n простое, то n делит нацело* $2^{n-1}-1$.

Составные числа, делящие нацело $2^{n-1}-1$, первым из которых является число 341, называют *псевдопростыми* или *числами Пуле.* Вот первые числа Пуле: {341, 561, 645, 1105,...}. Чисел Пуле бесконечно много, поскольку, если n псевдопростое, то и 2^n-1 будет псевдопростым. В самом деле, если $2^{n-1}-1=na$, то

$$2^{(2^n-1)-1}-1=2^{an}-1=\left(2^{an}+1\right)\left(2^{an}-1\right)=$$

$$=\left(2^{an}+1\right)\left(2^n-1\right)\left(2^{an-n}+2^{an-2n}+\ldots+2^n+1\right).$$

Доказано, что если n простое, то каждый составной делитель 2^n-1 является псевдопростым.

В расположении простых чисел имеются многие таинственные особенности, не понятые и по сей день. Как-то раз, сидя на каком-то скучном заседании, знаменитый американский математик Станислав Улам начал на клетчатой бумаге выписывать натуральные числа по спирали. Подобное изображение натуральных чисел получило название *скатерти Улама.* Взгляните на рисунки 1 и 2, на которых изображена скатерть Улама. Простые числа на скатерти Улама напоминают план города, в котором явно выделяются прямоугольные проспекты. Один из проспектов, соответствующий полиному n^2+n+41, следовало бы назвать Эйлеровским. В чем здесь дело, откуда берутся эти прямолинейные проспекты, остается неясным.

197	196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185	184	183
198	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	182
199	146	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	132	181
200	147	102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90	131	180
201	148	103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89	130	179
202	149	104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88	129	178
203	150	105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87	128	177
204	151	106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86	127	176
205	152	107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85	126	175
206	153	108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84	125	174
207	154	109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83	124	173
208	155	110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	123	172
209	156	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	171
210	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225

Рис. 1

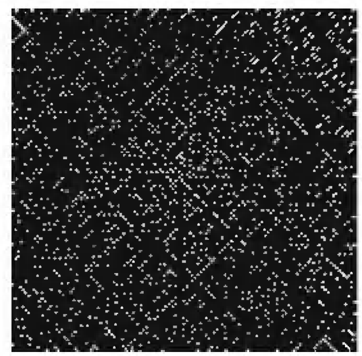


Рис. 2

А вот одно интересное геометрическое наблюдение. Нарисуем на координатной плоскости xOy параболу $y=x^2$ и возьмем на ней точки $A_n\left(-n,n^2\right)$ и $B_m\left(m,m^2\right)$, где n и m – натуральные числа, причем $n\ge2$ и $m\ge2$. Проведем через все эти точки прямые. Каждая прямая l_{nm}, проходящая через точки A_n и B_m, пересекает ось параболы Oy в точке $(0,\ mn)$.

Упражнение 5. Убедитесь в этом.

Немецкий математик Мёбиус (1790 – 1868) заметил, что все возможные прямые l_{nm} «перечеркивают» на оси Oy все составные числа. Неперечеркнутыми остаются только простые числа и единица. Рисунок 3 наглядно иллюстрирует это.

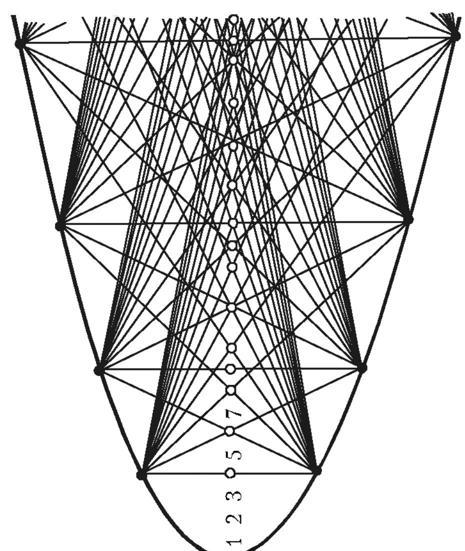


Рис. 3

Типовые задачи вступительных экзаменов в МФТИ

В.МОЖАЕВ

Рассмотрим типичный вариант письменной экзаменационной работы по физике на вступительном экзамене в Московский физико-технический институт (государственный университет). Вариант включает пять задач из разных разделов физики.

Задача 1. *На рисунке 1 изображена тележка, которая может двигаться прямолинейно по горизонтальной поверхности стола без трения. К тележке прикреплена горизонтальная ось O, перпендикулярная плоскости рисунка. Вокруг оси O (в плоскости, перпендикулярной ей) может вращаться небольшой шарик массой m. Шарик укреплен на конце стержня длиной L. Масса тележки, оси O и ее крепления равна 4m. Массами стержня и колес тележки пренебречь. Вначале тележка покоилась, а стержень удерживался под углом $\beta = 30^\circ$ к вертикали. Затем стержень отпустили. Найдите: 1) скорость тележки в момент прохождения шариком нижней точки своей траектории; 2) амплитуду колебаний тележки, т.е. половину расстояния между наиболее удаленными друг от друга положениями тележки.*

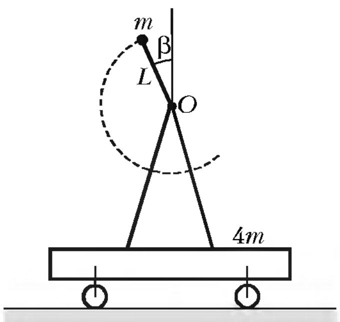


Рис. 1

1) В момент прохождения шариком нижней точки своей траектории его скорость горизонтальна и направлена слева направо. Обозначим эту скорость через v. Очевидно, что скорость тележки направлена в противоположную сторону. Обозначим ее через u. Движение шарика, как и движение тележки, мы рассматриваем в неподвижной системе координат. По закону сохранения энергии можно записать

$$mgL(1+\cos\beta) = \frac{mv^2}{2} + \frac{4mu^2}{2}.$$

Здесь потенциальная энергия шарика отсчитывается от уровня, проходящего через нижнюю точку траектории шарика, поэтому в исходном положении шарик обладает только потенциальной энергией, а в нижней точке – только кинетической. Поскольку в горизонтальном направлении сумма действующих на систему тележка – шарик сил равна нулю, в любой момент времени импульс системы в горизонтальном направлении равен нулю:

$$mv - 4mu = 0\ .$$

Решая совместно систему двух уравнений, получим, что искомая скорость тележки равна

$$u = \sqrt{\frac{gL(1+\cos\beta)}{10}} = 0,43\sqrt{gL}\ .$$

2) Так как горизонтальный импульс системы равен нулю, во время колебательных движений центр тяжести нашей системы остается неизменным. Удаление тележки от центра тяжести будет максимальным в тот момент, когда стержень находится в горизонтальном положении. Обозначим расстояние (по горизонтали) от центра тяжести системы до центра тележки через a, тогда расстояние от шарика до центра тяжести системы будет $L - a$. По правилу моментов можно записать

$$mg(L-a) = 4ma\ .$$

Отсюда амплитуда колебаний тележки будет равна

$$a = \frac{L}{5}\ .$$

Задача 2. *Тонкая трубка, запаянная с одного конца, заполнена маслом и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси так, что масло не выливается и полностью заполняет горизонтальное колено трубки (рис.2). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки даны на рисунке. Атмосферное давление p_0, плотность масла ρ. Найдите: 1) давление масла в месте изгиба трубки; 2) давление масла у запаянного конца трубки.*

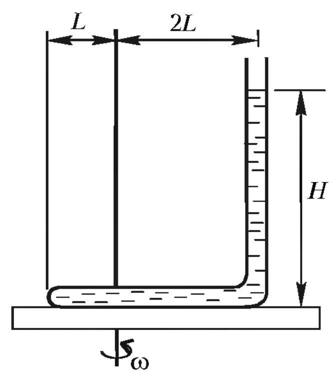


Рис. 2

1) Давление масла p_1 в месте изгиба трубки находим из условия равновесия столба масла в вертикальной части трубки:

$$p_1 = p_0 + \rho gH,$$

где g – ускорение свободного падения. Очевидно, что давление в месте изгиба не зависит от угловой скорости вращения платформы.

2) Другое дело, давление масла у запаянного конца трубки. Оно, безусловно, зависит от ω. Для нахождения этого давления выделим бесконечно малый элемент масла длиной dr, находящийся на расстоянии r от оси вращения (рис. 3). Обозначим давление в сечении трубки на расстоянии r от оси вращения через p, а давление на расстоянии $r + dr$ – через $p + dp$. Сила, равная разности давлений dp в этих двух сечениях, умноженной на площадь поперечного сечения трубки S, и направленная к оси вращения, создает в данном случае центростремительное ускорение, вынуждая элемент масла толщиной dr вращаться

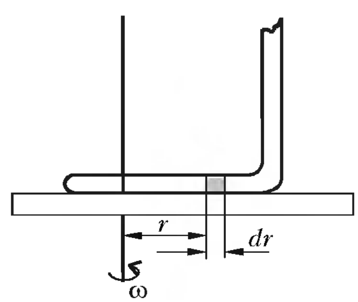


Рис. 3

(Продолжение см. на с. 34)

Цифры в маски нарядились ...

Хотите головоломку? Пожалуйста!

Английские ребусы

1. *PUZZLE* + *PUZZLE* = = *WELCOME*.

2. Семь раз подумай, один раз реши:

$$7 \times \text{THINK} = \text{SOLVE}.$$

3. Хижина и пицца:

4. Какое наименьшее и какое наибольшее количество деревьев может быть в лесу, если известно, что

(tree — дерево, forest — лес)?

5. Какое наименьшее и какое наибольшее количество цветов может быть в букете, если известно, что

FLOWER + FLOWER + ...

... + FLOWER = BOUQUET

(flower — цветок)?

6. При каком наименьшем количестве слагаемых в левой части справедливо равенство

MARTIN + MARTIN + ...

... + MARTIN = GARDNER?

Немецкие ребусы

7. Из какого наименьшего и какого наибольшего количества «ха» получается «смех»:

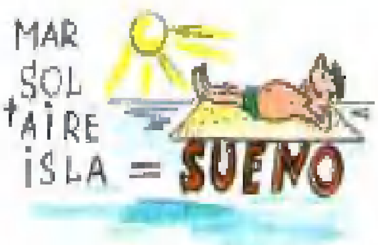
HA + HA + ... + HA = LACHEN?

8. В следующей головоломке не используется цифра 0:

(sonne — солнце, meer — море, traum — мечта).

Испанский ребус

9. Головоломка имеет несколько реализаций, найдите хотя бы одну:



(mar — море, sol — солнце, aire — воздух, isla — остров, sueno — мечта).

В.Вайсер (Тенериф, Канары)

Цифровые ребусы

Во всех приведенных ниже цифровых ребусах одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные. Решите эти ребусы.

1.

2. ЦИФРА + ЦИФРА + + ЦИФРА = ЗАДАЧА.

3. $\begin{cases} \text{ЭН} \times 2 = \text{ДВА}, \\ \text{ЭН} \times 3 = \text{ТРИ}. \end{cases}$

4.

5. Е,Д(А) = Д:А.

6.

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} \text{А Ж У Р} \\ \text{А Ж У Р} \end{array} \\ \hline * * * * * \\ + \; * * * * * \;\; \\ * * * * * \;\;\;\; \\ * * * * * \;\;\;\;\;\; \\ \hline * * * * \text{М У А Р} \end{array}$$

7. Какое наибольшее количество «слов» могло предшествовать «драке»:

СЛОВО + СЛОВО + СЛОВО +...

... + СЛОВО = ДРАКА?

8. а) $\text{РО}^{\text{С}} = \text{СИЯ}$; б) $\text{РОС} = \text{СИ}^{\text{Я}}$; в) $\text{РО}^{\text{С}} = \text{СИ}^{\text{Я}}$.

9. Докажите, что

$$\text{С} \times \text{С} \times \text{С} \times \text{Р} \neq \text{РФ}.$$

10. $\text{АА} = \sqrt{\text{ББВВ}}$.

11. Словами ЛАЗЕР РЕЗАЛ зашифрованы два числа, одно из

которых кратно другому. Найдите их.

12. Решите ребус в шестеричной системе счисления:

13. Найдите РАДИУС в девятеричной системе счисления, если РАДИУС + РАДИУС =

= ДИАМЕТР.

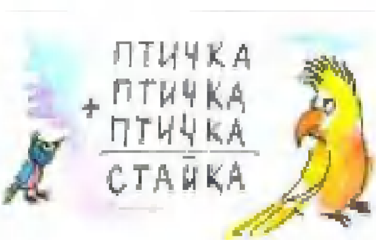
14. КУС и СУК — треугольные числа. Какие?

15. а)
```
  КАПЛЯ
 +КАПЛЯ
  КАПЛЯ
 -------
 ЛУЖИЦА
```

б)

в)
```
  ЛИСТОК
 +ЛИСТОК
  ЛИСТОК
 --------
 БЛОКНОТ
```

г)



д) $ПТИЧКА \times 6 = СТАЙКА$

е)
```
  ТРОПКА
 +ТРОПКА
  ТРОПКА
 -------
 ДОРОЖКА
```

16. а)
```
  ЧЕТЫРЕ
 +ЧЕТЫРЕ
 -------
  ВОСЕМЬ
```

б)
```
  ШЕСТЬ
 +ШЕСТЬ
  ШЕСТЬ
 ------
  СУММА
```

17. а) $ЖАР = (Р + А)^{Ж}$;

б) $РАЖ \times ЖАР = КУРАЖ$;

в) $ЖАР \times РАЖ = ПОЖАР$.

18. $МА \times МА = ЭММА$.

19. а) $АМУР^2 = {*}{*}{*}{*}МУАR$;

б) $АМУР \times Р = {*}МУАР$;

в) $АМУР \times Р = М{*}УАР$.

20.
```
      ФЛАГ
    × ФЛАГ
    -------
      Ф***
     **Ф**
  + ***Ф*
   ****Ф
  ---------
   ****Ф***
```

21. $ТОН \times НОТ = КАНОН$.

22. а) $ТОР = О^{Р-Т}$;

б) $ОРТ = Т^{О-Р}$.

23. а) $КУБ = Б^{У+К}$;

б) $КУБ = (Б + У + К)^3$.

М.Ахмеджанова
(Черноголовка Московской обл.)

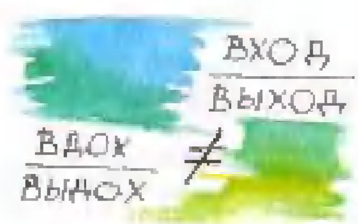
Числовая мозаика

1. Может ли дробь

$$\frac{ВЕКТОР}{ВЕК + ТОР}$$

равняться целому числу?

2. Докажите, что



3. Найдите число МАРИЯ, если известно, что

$$МАРИЯ = (М + А + Р + И + Я)^{Я}.$$

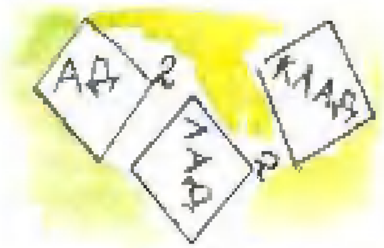
4. Докажите, что разность НЕТНЕТНЕТ — ДАДАДА число составное.

5. Известно, что С < Р. Что больше:

6.

Я доказать велел ребятам,
Что ТЕТЯ может быть квадратом;
Но их другой вопрос тревожит:
«А ДЯДЯ — почему не может?»

7. а)
Вот числа:
АД, и ЛАД, и КЛАД.
Возможно ли, что каждое — квадрат?



б) Можно ли заменить буквы цифрами, чтобы из слов

АД, ЛАД, УКЛАД

получились квадраты?

8. Какой цифрой надо заменить букву А, чтобы сумма

КАЗАК + ЗАКАЗ

без остатка разделилась на 7?

9. Число КАР делится на 13. Делится ли на 13 число АРК?

10. Вы же знаете, друзья,
Что на нуль делить нельзя.
Но проверьте: может, ЛУНЬ
Вдруг разделится на НУЛЬ?

11. А теперь другой вопрос:
ТОРС разделится на ТРОС?

А.Зайчик (Москва)

(Начало см. на с. 31)

по окружности радиусом r с угловой скоростью ω. Уравнение этого вращательного движения будет иметь вид

$$\rho S dr \omega^2 r = S dp .$$

Возьмем от обеих частей этого уравнения определенные интегралы: по r от $r = -L$ до $r = 2L$, а по p от неизвестного давления у запаянного конца p_2 до давления в изгибе p_1:

$$\rho\omega^2 \int_{-L}^{2L} r\,dr = \int_{p_2}^{p_1} dp .$$

Отсюда найдем

$$p_2 = p_1 - \frac{3}{2}\rho\omega^2 L^2 .$$

После подстановки выражения для p_1 получим

$$p_2 = p_0 + \rho g H - \frac{3}{2}\rho\omega^2 L^2 .$$

Задача 3. *Между двумя неподвижными плоскопараллельными незаряженными пластинами 1 и 2 (рис. 4), закороченными через резистор сопротивлением R, помещают аналогичную проводящую пластину 3 с положительным зарядом q на расстоянии a от пластины 2, причем $a < d/2$, где d – расстояние между пластинами 1 и 2. После установления равновесного состояния пластину 3 быстро перемещают в симметричное положение (на расстоянии a от пластины 1). Полагая, что за время перемещения пластины 3 заряд на пластинах 1 и 2 не успевает измениться, определите: 1) величину и направление тока через резистор сразу после перемещения пластины 3; 2) количество теплоты, выделившееся в резисторе после перемещения пластины. Площадь каждой пластины S, расстояние между пластинами мало по сравнению с линейными размерами пластин.*

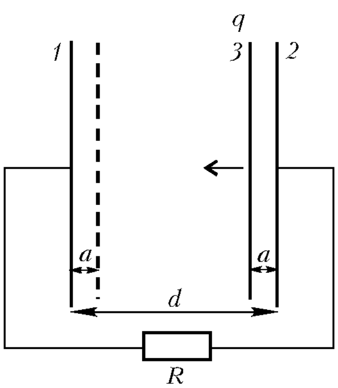


Рис. 4

1) Рассмотрим начальное равновесное состояние нашей системы, когда пластина 3 с зарядом q находится у правой пластины конденсатора. После установления стационарного состояния ток через резистор равен нулю, а пластины 1 и 2 эквипотенциальны и, следовательно, разность потенциалов между ними также равна нулю. Пусть на правой обкладке конденсатора установится заряд $-q_1$, тогда на левой будет $+q_1$. Запишем условие эквипотенциальности обкладок:

$$\frac{q_1 d}{\varepsilon_0 S} + \frac{qa}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q(d-a)}{2\varepsilon_0 S} = 0 .$$

Отсюда находим

$$q_1 = \frac{q(d-2a)}{2d} .$$

После перемещения пластины 3 разность потенциалов между пластинами 1 и 2 уже не будет равна нулю. Определим эту разность потенциалов:

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{q_1 d}{\varepsilon_0 S} + \frac{q(d-a)}{2\varepsilon_0 S} - \frac{qa}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_1 d}{\varepsilon_0 S} + \frac{q(d-2a)}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q(d-2a)}{\varepsilon_0 S} .$$

Возникшая разность потенциалов приведет к появлению тока через резистор:

$$I = \frac{\Delta\varphi_{12}}{R} = \frac{q(d-2a)}{\varepsilon_0 SR} ,$$

причем ток будет течь от пластины 1 к пластине 2.

2) После перемещения пластины 3 будет происходить перезарядка пластин 1 и 2 до тех пор, пока они снова не станут эквипотенциальными. При этом в резисторе будет выделяться тепло. Поскольку начальная (до перемещения пластины 3) и конечная энергии электрического поля системы трех пластин равны, то суммарное количество теплоты, выделившееся в резисторе, будет равно работе, совершенной при перемещении пластины 3. Так как перемещение пластины 3 проводилось быстро, при сохранении зарядов на пластинах 1 и 2, можно считать, что перемещение пластины 3 происходило в постоянном электрическом поле с напряженностью

$$E = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S} = \frac{q(d-2a)}{2\varepsilon_0 S d} .$$

Отсюда найдем совершенную работу, а следовательно, и выделившееся количество теплоты:

$$Q = A = qE(d-2a) = \frac{q^2(d-2a)^2}{2\varepsilon_0 S d} .$$

Задача 4. *Два одинаковых проводящих диска радиусами R вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$) в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной их плоскостям (рис.5). Центры дисков с помощью проводников присоединены к конденсатору емкостью C_1, а ободы – через скользящие контакты к конденсатору емкостью C_2. Найдите напряжения, которые установятся на конденсаторах.*

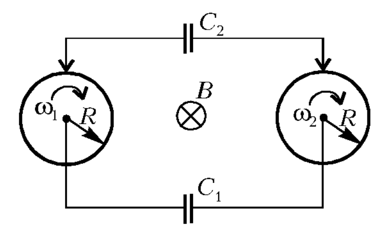


Рис. 5

Сначала рассмотрим, что происходит со свободными зарядами проводящего диска, вращающегося с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ (рис.6). На электроны, вращающиеся вместе с диском, действует сила Лоренца. В нашем случае сила Лоренца, действующая на свободный электрон, направлена к центру диска, поэтому электроны смещаются к центру, а на периферии остаются положительно заряженные атомы (атомы без внешнего электрона). Перераспределение заряда приводит к появлению радиального электрического поля $\vec{E}$, направленного к центру. Устанавливается такое распределение зарядов и, соответственно, такое электрическое поле $E(r)$, что сила Лоренца, действующая на

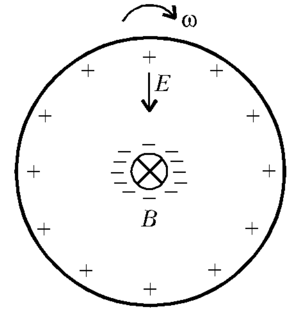


Рис. 6

электрон, уравновешивается электростатической силой:

$$e\omega r B = eE(r),$$

где e – заряд электрона. Отсюда мы получаем распределение напряженности электрического поля по r:

$$E(r) = \omega B r .$$

Теперь мы можем найти разность потенциалов между центром диска и ободом, т.е. ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_i = \int_0^R E(r)\,dr = \omega B\int_0^R r\,dr = \frac{\omega B R^2}{2} .$$

В нашем случае для левого диска получим

$$\mathcal{E}_{i1} = \frac{\omega_1 B R^2}{2},$$

а для правого –

$$\mathcal{E}_{i2} = \frac{\omega_2 B R^2}{2} .$$

Очевидно, что установившиеся заряды на конденсаторах будут равны по величине, но противоположны по знаку. Поскольку $\mathcal{E}_{i1} > \mathcal{E}_{i2}$ (так как $\omega_1 > \omega_2$), то на левой пластине конденсатора емкостью C_2 будет «+», а на левой пластине конденсатора емкостью C_1 будет «–». Обозначим величину заряда на конденсаторах через q. По закону Ома для нашего замкнутого контура можно записать

$$\mathcal{E}_{i1} - \mathcal{E}_{i2} = \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_1} .$$

Отсюда находим

$$q = \frac{(\mathcal{E}_{i1} - \mathcal{E}_{i2})C_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{BR^2(\omega_1 - \omega_2)C_1C_2}{2(C_1 + C_2)} .$$

Напряжения, которые установятся на конденсаторах, будут равны

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{BR^2(\omega_1 - \omega_2)C_2}{2(C_1 + C_2)}$$

и

$$U_2 = -\frac{q}{C_2} = \frac{BR^2(\omega_2 - \omega_1)C_1}{2(C_1 + C_2)} .$$

Задача 5. *Оптическая система состоит из рассеивающей линзы $Л_1$ и собирающей линзы $Л_2$, расположенных на расстоянии L = 10 см друг от друга (рис.7). Главные оптические оси линз параллельны и смещены друг относительно друга на расстояние d. Параллельный пучок света, падающий перпендикулярно плоскостям линз, фокусируется системой в точке A, расположенной слева от линзы $Л_1$ на расстоянии a = 30 см от нее и на расстоянии b = 1 см от ее оптической оси. Фокусное расстояние линзы $Л_1$ равно F_1 = 10 см. 1) Найдите фокусное расстояние F_2 собирающей линзы $Л_2$. 2) Определите расстояние d между оптическими осями линз.*

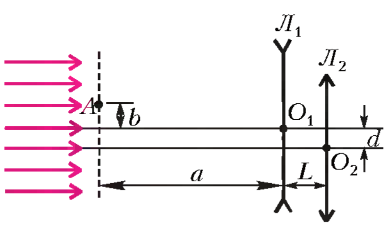


Рис. 7

1) После прохождения линзы $Л_1$ падающий параллельный пучок света соберется слева от этой линзы на расстоянии, равном ее фокусному расстоянию F_1. Проход через линзу $Л_2$ дает мнимое изображение слева от этой линзы на расстоянии $L + a$. По формуле линзы (для линзы $Л_2$) можно записать

$$\frac{1}{L + F_1} - \frac{1}{L + a} = \frac{1}{F_2} .$$

Отсюда находим фокусное расстояние собирающей линзы $Л_2$:

$$F_2 = \frac{(L + F_1)(L + a)}{a - F_1} = 40 \text{ см} .$$

2) Для ответа на второй вопрос рассмотрим луч, идущий вдоль главной оптической оси линзы $Л_1$ (рис.8). Линзу $Л_1$ этот луч проходит без преломления, оставаясь параллельным главной оптической оси линзы $Л_2$. После прохождения линзы $Л_2$ луч преломляется и идет в фокус F_2 этой линзы, а продолжение этого луча попадает в точку A. Рассмотрим два подобных треугольника AF_2C и ABD. Из их подобия следует, что

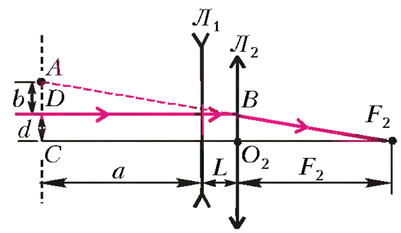


Рис. 8

$$\frac{CF_2}{DB} = \frac{AC}{AD}, \quad \text{или} \quad \frac{a + L + F_2}{a + L} = \frac{b + d}{b},$$

откуда находим искомое расстояние между оптическими осями линз:

$$d = \frac{bF_2}{a + L} = 1 \text{ см} .$$

Упражнения

1. На тележке, которая может двигаться по горизонтальным рельсам прямолинейно и без трения, укреплена в горизонтальной плоскости трубка в форме кольца (рис. 9, вид сверху). Внутри трубки может двигаться без трения шарик массой m. Масса тележки с трубкой M, массой колес можно пренебречь. Шарику при неподвижной тележке сообщают в точке A скорость $\vec{v}_0$, направленную параллельно рельсам. 1) Найдите скорость тележки при прохождении шариком точки B тележки, диаметрально противоположной точке A. 2) На каком расстоянии от первоначального положения окажется тележка через время t, когда шарик совершит несколько оборотов?

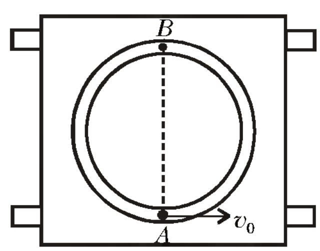


Рис. 9

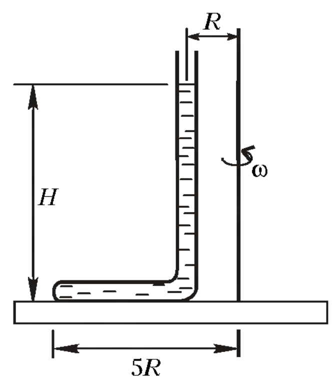


Рис. 10

2. Тонкая запаянная с одного конца трубка заполнена жидкостью и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (рис. 10). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки указаны на рисунке. Атмосферное давление p_0, плотность жидкости ρ. Найдите: 1) давление жидкости в месте изгиба трубки; 2) давление жидкости у запаянного конца трубки.

3. Два плоских конденсатора с пластинами площадью S и расстоянием между ними d включены в цепь через резистор сопротивлением R (рис. 11). В

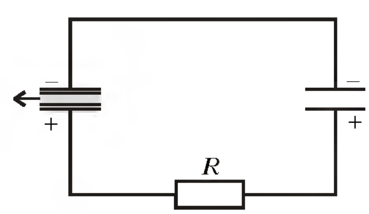


Рис. 11

левом конденсаторе расположена диэлектрическая пластина толщиной d, площадью S и проницаемостью ε. Конденсаторы заряжены до напряжения U. Пластину быстро выдвигают из конденсатора. Пренебрегая изменением зарядов на пластинах конденсатора за время удаления диэлектрика, определите: 1) какую работу пришлось совершить при этом; 2) чему равен и куда направлен ток через резистор сразу после удаления диэлектрика.

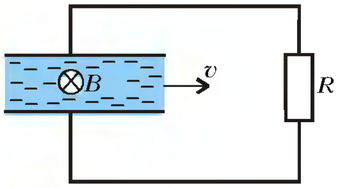


Рис. 12

4. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением ρ, движущейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам (рис. 12). Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной вдоль пластин и перпендикулярно скорости жидкости. Найдите полезную мощность, которая выделяется в виде тепла на внешней нагрузке сопротивлением R.

5. Оптическая схема состоит из собирающей линзы $Л_1$ и рассеивающей линзы $Л_2$ (рис.13), главные оптические оси которых параллельны и смещены друг относительно друга на расстояние $d = 1$ см. На систему со стороны собирающей линзы параллельно ее главной оптической оси падает параллельный пучок света. Найдите положение фокуса F такой системы, т.е. его расстояние x до плоскости линзы $Л_2$ и расстояние y до главной оптической оси линзы $Л_1$. Расстояние между линзами $a = 30$ см, фокусные расстояния линз $Л_1$ и $Л_2$ равны $F_1 = 10$ см и $F_2 = 10$ см.

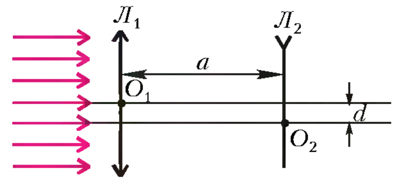


Рис. 13

ОЛИМПИАДЫ

VIII Международный турнир «Компьютерная физика»

Заочный тур.
«Молекула без электронов»

Известно, что химическая связь в молекулах обусловлена наличием электронов, расположенных в пространстве между ядрами. Например, простейшая молекулярная система – молекулярный ион водорода – представляет собой два протона, расположенных на некотором расстоянии друг от друга, а между ними находится электрон, обеспечивающий притяжение между протонами. В такой системе сила притяжения оказывается больше, чем сила взаимного расталкивания протонов. Удаление электрона из системы ведет к развалу молекулы.

Может ли существовать молекула без электронов? Казалось бы нет, потому что в соответствии с законом Кулона одноименно заряженные частицы отталкиваются и мгновенное удаление электрона из молекулы приводит к эффекту «кулоновского взрыва». Однако, наличие сильного внешнего электромагнитного поля способствует возникновению притяжения между ядрами.

Можете ли вы предложить механизм удержания одноименных заряженных частиц в сильном лазерном поле?

Рассмотрим двумерную аналитическую модель явления. Будем считать, что система состоит из двух ядер с зарядами z_1e и z_2e и массами M_1 и M_2. Потенциальная энергия взаимодействия частиц записывается в виде

$$U\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right) = \frac{z_1 z_2 e^2}{\sqrt{\alpha^2 + \left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}},$$

где x_1, y_1 и x_2, y_2 – координаты ядер, α – параметр сглаживания потенциала. Со стороны поля электромагнитной волны с круговой поляризацией на каждое из ядер действует сила

$$\vec{F}_i = z_i e E_0(t)\left(\vec{n}_x \cos\omega t + \vec{n}_y \sin\omega t\right),$$

где $i = 1, 2$, $E_0(t)$ – огибающая лазерного импульса, ω – его частота, $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ – единичные векторы, направленные вдоль осей x и y соответственно.

Предлагается записать уравнения движения ядер, разработать алгоритм численного решения полученной системы уравнений и на его основе провести моделирование движения. Можно ограничиться случаем $M_2 = 2M_1$, где M_1 – масса протона.

Задание

1. Рассмотрите случай прямоугольного импульса частотой $\omega = 1{,}5 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$. Исследуйте динамику системы и возможность удержания ядер возле друг друга в зависимости от интенсивности излучения $P = \frac{cE_0^2}{4\pi}$ в диапазоне 10^{18} – 10^{22} Вт/см^2.

2. Исследуйте динамику системы и возможность удержания ядер возле друг друга при различных частотах ω в диапазоне $2 \cdot 10^{14} - 2 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$.

3. Рассмотрите случай плавного включения поля, когда $E_0(t)$ изменяется по закону

$$E_0(t) = \begin{cases} E_0 \sin^2 \frac{\pi t}{2\tau}, & t \le \tau, \\ E_0, & t \ge \tau, \end{cases}$$

где τ – длительность включения импульса. Начальное расстояние между ядрами считать равным 0,8 Å, параметр $\alpha = 1$ Å.

Об условиях и порядке проведения этого турнира подробно рассказано в предыдущем номере журнала «Квант».

Очередной прием в ОЛ ВЗМШ

Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа» (ОЛ ВЗМШ) Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, в очередной раз проводит набор учащихся.

ОЛ ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников. «Открытый» – значит доступный для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, химия, правоведение, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций, в частности – по организации Интернет-отделения ОЛ ВЗМШ.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября-октября 2004 года все поступившие будут систематически (примерно раз в месяц) получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы с образцами решений, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно, помимо конкретных недочетов, указать пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, и в филологии, и в экономике, и в других науках. Решение задач поможет прояснить, сделать интересными многие казавшиеся непонятными и скучными разделы.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами (часто эти два качества совмещаются в одном и том же человеке).

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли на бумаге и других носителях информации, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают соответствующие дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Успешно – это не значит обязательно решить все задачи. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (за исключением отделений филологии, экономики, права и истории – см. ниже) и выслать *простой бандеролью, не сворачивая в трубку*. Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают в *отдельной тетради*. На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2004 года*), *полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали об ОЛ ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить*.

Вступительные работы обратно не высылаются.

Срок отправки работ – не позднее 30 апреля 2004 года.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад (не обязательно участие в самых последних олимпиадах).

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. Плата невелика, на каждом отделении своя. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ОЛ ВЗМШ готов обратиться по любому адресу – в школу, в орган народного образования, к другому спонсору – с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ОЛ ВЗМШ, кроме экономического, имеется еще одна форма – «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2004 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с описанием его профессии и должности, со списком учащихся и четким указанием, в каком классе они будут учиться с сентября 2004 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами по представлению ОЛ ВЗМШ как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском университете, имеющая отделения математики, биологии и химии.

Проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), желающие поступить на отделения математики и химии, высылают вступительные работы по адресу:

198097 Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д.32, Северо-Западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы в адрес ОЛ ВЗМШ или (по математике) соответствующего филиала.

Адрес ОЛВЗМШ: 119234 Москва В-234, Ленинские горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ, на прием (с указанием отделения). Телефон: (095) 939-39-30.

Филиалы математического отделения ОЛ ВЗМШ имеются:

- при университетах – в Воронеже, Донецке (Украина), Екатеринбурге, Майкопе, Ульяновске, Челябинске;
- при педагогических институтах – в Иванове и Кирове;
- при Брянском центре технического творчества молодежи.

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Это отделение открылось в 1964 году. Из него выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом. Осуществляется перевод уже апробированных и вновь создаваемых материалов на электронный язык в интерактивном режиме, отделение готовится к работе в Интернете.

Окончившие отделение математики получат, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности.

Обучение длится 4 года. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2004 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 7 классов средней школы, на 2-й курс – 8 классов, на 3-й – 9 классов, на 4-й – 10. При этом поступившим на 2-й и 3-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 4-й курс обучение проводится по специальной интенсивной программе с упором на подготовку в вуз.

Внимание! Отделение математики открывает новый курс для обучения на базе 6 классов. Этот курс пока не получает своего «законного» номера, а будет называться «экспериментальным». Поступившие на него будут обучаться в течение 5 лет – с 7 по 11 класс.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке тетради напишите, на какой курс вы хотите поступить.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы.

Задачи

(звездочкой отмечены более трудные, с точки зрения составителя работы, задачи)

1 (6–10). В некотором месяце три воскресенья приходились на четные числа. Каким днем недели было в этом месяце 18-е число?

2 (6–10). Попробуйте расставить по кругу числа 14; 27; 36; 57; 178; 467; 590; 2345 так, чтобы у каждой пары соседей была одна одинаковая цифра.

3 (7–10). Точка M лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC, причем оба треугольника, ABM и CBM, также равнобедренные. Каким может быть угол ABC?

4 (6–10). Селекционеру Васе удалось добиться того, что число ягод на любых двух соседних кустах из:

а) 16; б) 14

растущих вдоль забора кустов отличается на 1. Может ли на них быть всего 357 ягод?

5 (7–10). Не пользуясь калькулятором и другими вычислительными приборами, попробуйте сравнить числа $\frac{0,2004886}{2,004887}$ и $\frac{20,04887}{200,4888}$.

6 (6–10). Вырежьте из квадрата 13×13 наибольшее возможное количество прямоугольников 1×5.

7 (пункт а) для 6–10, пункт б) для 8–10). Положительное число a уменьшили на 64%. На сколько процентов уменьшилось при этом число: а) a^2; б) $\sqrt{a}$?

8 (8–10). Пусть E, F и G – середины сторон AB, BC и AD соответственно выпуклого четырехугольника $ABCD$, причем $AB \perp GE$, $BC \perp GF$, $\angle ACG = \alpha$. Чему равен угол ADC?

9 (7–10). Найдите все пары чисел $(x;\ y)$, для которых $4x^2 + 12xy + 25y^2 - 8y + 1 = 0$.

10* (7–10). Пусть сумма нескольких положительных чисел равна сумме их квадратов. Что больше: сумма их кубов или сумма их четвертых степеней?

11 (8 – 10). Пусть точки A и B лежат на разных сторонах угла и из них восставлены к этим сторонам перпендикуляры, пересекающие биссектрису угла в точках C и D соответственно. Верно ли, что середина отрезка CD лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB?

12* (7–10). В акционерном обществе 2004 акционера, причем любые 1100 из них вместе имеют контрольный пакет (не менее 50%) акций. Какую наибольшую долю акций может иметь 1 акционер?

13 (10). Все ребра треугольной пирамиды равны 1, причем некоторые окрашены в синий, а остальные – в красный цвет. Оказалось, что красные ребра образуют пространственную замкнутую ломаную линию без самопересечений. Какую длину может она иметь?

14* (10). Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат. Рассмотрим точки с целочисленными координатами $(x;\ y;\ z)$ такими, что одновременно выполнены неравенства $0 < x < 100$; $0 < y < 100$; $0 < z < 100$. Для каждой такой точки найдем сумму ее наибольшей и наименьшей координат. Сложим все найденные числа. Чему равна полученная сумма?

Отделение биологии

Набор проводится в 31-й раз. Основное внимание при обучении уделяется наименее изучаемым в школе, но бурно развивающимся в настоящее время разделам биологической науки: молекулярной биологии, биохимии, иммунологии, генетике, биофизике, физиологии и т.д.

На отделении созданы известные в стране оригинальные учебники, задачники и другие учебные пособия для школьников (часть из них издана массовым тиражом издательствами «Мирос» и «Фазис» и хорошо известна в школах).

Проводится набор на два потока: трехгодичное обучение на базе 8 классов и двухгодичное – на базе 9 классов. Принимаются группы «Коллективный ученик». Такой группе надо выслать коллективно выполненную работу, а также заверенный печатью учреждения, при котором она будет работать, список членов группы с указанием фамилии, имени и отчества руководителя кружка.

При решении задач можно использовать и факты, найденные в литературе (в этом случае приведите ссылки на источник), и собственные идеи. Вместе с работой необходимо прислать стандартный конверт с маркой и полным (с индексом) почтовым адресом – в нем вам пришлют решение Приемной комиссии.

Поступающие на трехгодичное обучение решают задачи 1 – 5 из приведенного ниже списка, на двухгодичное обучение – задачи 3 – 7. В задании использованы материалы Всероссийской биологической олимпиады учреждений дополнительного образования и Биологической олимпиады школьников МГУ.

Задачи

1. Как животные защищаются от паразитов? Постарайтесь предложить как можно больше разных способов.

2. Многие растения и животные обитают на поверхности тел других растений или животных, но не поедают хозяев. В чем могут состоять преимущества такого образа жизни для «поселенца»? А для хозяина? По возможности подтвердите ваши соображения конкретными примерами.

3. Каждую зиму на пруды одного греческого фермера, разводящего форель, прилетают утки и, взмучивая и загрязняя воду, вредят поголовью рыб. Возмущенный фермер решил пожаловаться в посольство страны, откуда эти утки прилетают. Предложите как можно большее число способов, с помощью которых он может определить родину уток.

4. Дети на даче ведут разговор:

– Ты заметил, маму комары почти не кусают, а папа жалуется на них каждый день и действительно ходит весь в волдырях!

– Не только заметил, но и придумал несколько причин этого отличия. Теперь нужно решить, как проверить разные варианты...

А какие объяснения и способы их проверки можете предложить вы?

5. Какие свойства микроорганизмов можно изучать без микроскопа?

6. «Головокружение случается от голода, при резком подъеме или спуске, в горах, от кружения на карусели, от потери крови, у беременных и, наконец, от успехов. Это хороший пример того, как разные воздействия запускают один и тот же физиологический механизм», – считает физиолог доктор Литвинус. Согласны ли вы с доктором? Чтобы аргументировать ваше мнение, объясните, каковы физиологические механизмы головокружения в каждом из указанных случаев.

7. Опишите возможные механизмы действия противоядий (веществ, которые вводятся в организм, чтобы свести к минимуму негативные последствия отравления тем или иным ядом).

Отделение физики

Отделение работает 12 лет. За это время нашими авторами написано большое количество учебно-методических пособий. В них излагаются методы решения типовых и нестандартных задач. Особое внимание уделяется выяснению физического смысла тех или иных величин, понятий, явлений, а также применению различных математических приемов к решению задач по физике.

В программу включены все основные разделы школьного курса, а также темы, мало или совсем не изучаемые в школе. Изложение материала максимально приближено к современным взглядам и достижениям физической науки.

Обучение одно- и двухгодичное. Завершается работа по дополнению его до трехгодичного. На двухгодичный поток принимаются оканчивающие в 2004 году 9 классов средней школы, на одногодичный – 10 классов. Для поступления на двухгодичный поток нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на одногодичный поток – задачи 4–8. На базе 10 классов можно пройти программу двухгодичного потока за один год, тогда нужно написать «10+11» на обложке тетради и постараться решить все предлагаемые ниже задачи.

Группы «Коллективный ученик» принимаются в 10 и 11 классы без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

Задачи

1. Два одинаковых тела двигаются по круглому гладкому желобу (рис.1). В начальный момент тела находятся на одном диаметре AB, при этом скорость одного тела в 2 раза больше скорости другого. Найдите, в какой точке тела столкнутся в двадцать пятый раз, если все соударения абсолютно упругие?

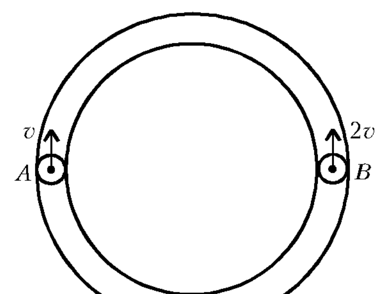


Рис. 1

2. Нить переброшена через неподвижный блок. Когда к одному концу нити привязали груз *1*, а за другой потянули вниз с силой F = 9,8 Н, груз *1* поднялся без начальной скорости на некоторую высоту за время τ. Подъем груза *2* аналогичным образом занял время 2τ. Когда же грузы *1* и *2* привязали к концам нити и предоставили систему самой себе, груз *1* поднялся на ту же высоту за время 3τ. Определите по этим данным массы грузов *1* и *2*.

3. Сосуд с водой нагрели от $t_0 = 0\,°C$ до некоторой температуры t, затратив при этом количество теплоты $Q_1 = 664$ кДж. Если воду заменить на лед при 0 °C, то на его плавление и нагревание до температуры t в том же сосуде потребуется количество теплоты $Q_2 = 1654$ кДж в случае, когда сосуд вначале имеет температуру t_0, и $Q_3 = 1494$ кДж, когда начальная температура сосуда равна t. Определите по этим данным теплоемкость сосуда. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

4. Два одинаковых амперметра, два одинаковых вольтметра и лампочка соединены в схему, изображенную на рисунке 2. Показания приборов таковы:

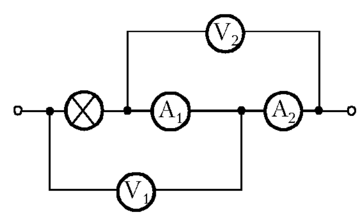


Рис. 2

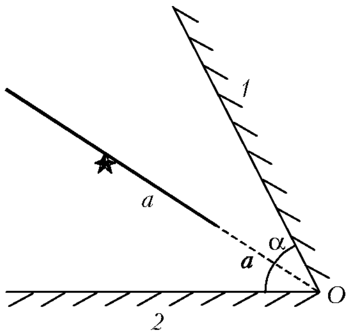


Рис. 3

$I_{A1} = 0$, $I_{A2} = 1$ А, $U_{V1} = 2$ В, $U_{V2} = 1$ В. Найдите мощность тока, текущего через лампочку.

5. За непрозрачной ширмой вплотную к ней на расстоянии a от края ширмы спрятан алмаз. Ширма расположена на биссектрисе угла $\alpha = 60°$, образованного двумя плоскими зеркалами, а ее край находится на расстоянии a от вершины угла O (рис. 3). Нарисуйте область с другой стороны ширмы, откуда можно увидеть изображение алмаза, если смотреть в зеркало *1*.

6. К концам пружины жесткостью k, сжатой на величину ΔL, прикреплены шарики, массы которых $2m$ и m. Систему помещают на гладкий горизонтальный стол и освобождают пружину. Найдите максимальное значение относительной скорости шариков при их последующем движении.

7. Из материала плотностью $\rho_0 = 0,5$ г/см^3 сделан цилиндр длиной $H = 6$ см, внутри которого находится множество полых вертикальных капилляров диаметром $d = 1$ мм каждый, при этом внутреннее пространство капилляров составляет $k = 1/3$ объема цилиндра. Цилиндр опускают в воду плотностью $\rho = 1,0$ г/см^3. Найдите длину части цилиндра, заполненной водой, если считать, что в этой части вода полностью занимает внутреннее пространство капилляров.

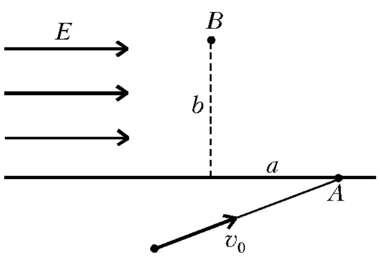


Рис. 4

8. Электрон влетает в однородное электрическое поле в точке A (рис. 4). Под каким углом к напряженности поля $\vec{E}$ должна быть направлена начальная скорость электрона $\vec{v}_0$, чтобы он пролетел через точку B? Известны расстояния a и b, масса электрона m_e и его заряд e.

Отделение химии

На отделение принимаются учащиеся, имеющие базовое образование в объеме 8, 9 или 10 классов средней школы.

В программе обучения следующие одногодичные курсы:
- общая химия (с элементами неорганической химии);
- неорганическая химия;
- органическая химия;
- химия окружающей среды.

Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи вступительной работы, помещенные ниже, – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, по заявлению руководителя.

Задачи

1. Укажите валентность и степень окисления кислорода в каждой из следующих частиц:

$$H_2O,\ H_2O_2,\ H_2SO_4,\ H_3O^+,\ OF_2.$$

2. В состав соли кислородсодержащей кислоты входит 34,57 масс.% натрия и 23,30 масс.% фосфора. Найдите формулу соли.

3. Напишите уравнения двух реакций, в которых хромат калия K_2CrO_4 — реагент, и уравнения двух реакций, в которых хромат калия — продукт.

4. Газ, полученный при сжигании 179,2 л сероводорода (н.у.), пропущен через 1,5 л 25%-ного раствора гидроксида натрия ($\rho = 1,28$ г/мл). Найдите концентрации всех растворенных веществ.

5. Теплота образования аммиака 46,19 кДж/моль. При смешении 300 л азота и 600 л водорода в промышленном реакторе выделилось 57,74 кДж тепла. Найдите максимальную массу 50%-ной азотной кислоты, которую можно получить из произведенного аммиака.

6. Какие продукты получатся при реакции аспирина (рис.5): а) с бромом; б) с водным раствором серной кислоты; в) с водным раствором NaOH? Укажите условия реакций.

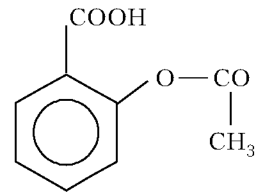


Рис. 5

Отделение филологии

Отделение скоро отметит свой пятнадцатый юбилей. За это время подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, литературе, интересным проблемам литературоведения и лингвистики.

Принимаются *все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 8 классов.* Отделение предлагает на выбор 15 учебных программ.

Вы хотите исправить свою грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Научиться говорить по-английски и понимать английскую речь? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда пришлите нам вступительную работу, и мы предложим вам ту программу или программы, которые помогут решить именно вашу проблему. Поскольку специалистам отделения необходимо как можно больше знать о ваших целях и задачах, *вступительная работа – это ответы на вопросы помещенного ниже теста*.

Внимание! Отвечайте на вопросы теста на двойном тетрадном листе, указав на первой странице важные для нас данные: Ф.И.О, какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон (если есть). Затем *полностью перепишите условия теста* и *выполните задания 1 – 6* (впишите, подчеркните нужное, проставьте галочки или цифры в квадратики и т.п.).

Тест

1. Впишите нужное

К 1 сентября 2004 года я закончу _______ класс.

2. Заполните клетки

Моя средняя оценка:

по русскому языку ☐

по литературе ☐

3. Подчеркните нужное

Моя грамотность:

а) абсолютная;

б) вполне приличная;

в) так себе;

г) низкая.

4. Расставьте цифры от 1 до 6 в соответствии с тем,

насколько для вас важны следующие задачи (1 – самое важное, 6 – наименее важное):

☐ узнать как можно больше об устройстве русского языка;
☐ узнать как можно больше о русской литературе;
☐ научиться хорошо и логично выражать свои мысли в сочинении;
☐ писать грамотнее;
☐ узнать больше об устройстве языков мира;
☐ узнать больше о том, что за наука – литературоведение.

5. Подчеркните нужное

Надеюсь, что учеба на филологическом отделении ОЛ ВЗМШ даст мне возможность:

а) удовлетворить свое природное любопытство;
б) заняться в свободное время тем, что мне интересно;
в) исправить школьные оценки по русскому языку и литературе;
г) приобрести знания и навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз.

6. Подчеркните нужное

Скорее всего, я буду поступать в вуз:

а) на филологическую специальность, где пишут сочинение и сдают русский устно;
б) на гуманитарную специальность, где пишут сочинение;
в) в негуманитарный вуз и писать сочинение;
г) в негуманитарный вуз и писать диктант;
д) в негуманитарный вуз и писать тест;
е) мне важно школу закончить!

Желающие поступить только на курсы «Журналистика: первый шаг» (основы журналистики, анализ текста, практическая работа в разных публицистических жанрах) и/или «Английский язык» (для тех, кто знает язык в объеме «Yes, it is») принимаются на основании заявления и анкету не заполняют.

Вместе с анкетой и/или заявлением пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Группам «Коллективный ученик» предлагаются курсы по русскому языку и литературе (курсы «Английский язык» и «Журналистика» – только индивидуально).

Отделение экономики

В 2003 году экономическое отделение ОЛ ВЗМШ отпраздновало свое десятилетие. Оно было создано в 1993 году группой энтузиастов из числа студентов и преподавателей экономического факультета МГУ, стремящихся познакомить школьников с основами экономической науки. В настоящее время коллектив отделения составляют преподаватели ОЛ ВЗМШ и экономического факультета МГУ, студенты и аспиранты факультета, большинство из которых в свое время сами приехали учиться в Москву из разных городов (многие из них закончили ОЛ ВЗМШ).

Обучение проводится по двум основным программам: *«Прикладная экономика»* и *«Экономика и география»*. Программа «Прикладная экономика» включает изучение основ экономической теории, а также знакомство с практикой ведения бизнеса в увлекательной деловой игре по переписке. Учащиеся программы «Экономика и география», наряду с изучением основ экономической теории, знакомятся также с особенностями экономико-географического положения и природы стран современного мира, заочно участвуют в увлекательных путешествиях по странам и регионам мира. Окончившим основную программу предлагается специализация по выбору: «Мировая экономика», «Бухгалтерский учет и финансовый анализ», «Предпринимательство и менеджмент», «Экономика России: прошлое, настоящее и будущее» и др.

Учащимся 10–11 классов, желающим одновременно подготовиться к поступлению на экономический факультет МГУ и в другие вузы, предлагается специальная программа *«Экономика ПЛЮС»*, которая включает подготовку по предметам программы вступительных экзаменов (математика, русский язык и литература, обществознание). С 2001 года для школьников, интересующихся географической наукой и собирающихся поступать на географический факультет МГУ или другого вуза, существует программа *«География ПЛЮС»*, созданная на основе опыта подготовительных курсов по географии Московского университета.

Принимаются *все желающие, имеющие образование не ниже 7 классов.* Обучение ведется либо индивидуально, либо в небольших группах (2–4 человека). Формы обучения «Коллективный ученик» на экономическом отделении нет.

Для поступления необходимо выполнить вступительную работу в форме теста, который включает вопросы по экономике, математике, истории, литературе, общей культуре. Учитывая, что в 2004 году в Европейский Союз вступят 10 новых стран, мы решили посвятить наш вступительный тест единой Европе.

Решения присылайте *только на открытках* с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (все – *печатными* буквами); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите «Экономика, вступительный тест 2004 г.». На открытке достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Верно ответившие на все вопросы получат из букв своих ответов осмысленную фразу, связанную с нашим юбилеем.

Тест

1. Ученый какой европейской страны впервые использовал термин «экономика»:

В) Рима;
Н) Грециии;
Д) Англии;
П) Франции;
Е) Византии?

2. Укажите событие, которое впервые произошло не в Европе:

А) появление бумажных денег;
З) учреждение парламента;
Е) первая промышленная революция;
И) заключение шенгенского соглашения;
Д) появление банков.

3. Брокер Иванов купил 20 мая 2003 года 20 тысяч акций РАО ЕЭС России, предвидя повышение их цены и способствуя такому повышению. Через неделю после роста курса акций на 16% он продал свой пакет акций. Как экономисты называют таких биржевых игроков:

Р) «медведь»;
С) «волк»;
М) «бык»;
И) «овца»;
К) «жираф»?

4. Какому государству принадлежит остров Европа:

Д) Франции;
Ш) России;
Я) Великобритании;
В) Дании;
Н) Испании?

5. Нобелевская премия по экономике была учреждена:

А) Альфредом Нобелем;
Ы) Международным сообществом экономистов;
Т) Шведской академией наук;

С) Джоном Кейнсом;
Е) королевским банком Швеции.

6. Что такое «Acquis Communautaire»:
С) общий свод законов и правил ЕС;
Я) соглашение о безвизовом режиме между европейскими странами;
Й) греческое название валюты единой Европы;
Ь) высший законодательный орган Европы;
О) латинское название Европейского Союза?

7. Какой русский государь, по словам А. С. Пушкина, «в Европу прорубил окно»:
П) Александр I;
Я) Петр Великий;
Р) Иван Грозный;
Е) Николай I;
Ю) Александр Невский?

8. Какой герой произведений русской литературы знаменит тем, что скупал у губернских помещиков души умерших крестьян:
О) Владимир Ленский;
В) Александр Чацкий;
Б) Илья Обломов;
Ж) Григорий Печорин;
Т) Павел Чичиков?

9. Встретились на базаре два купца, которые продавали персидские кафтаны, и повели следующий разговор:

— Дай мне два твоих кафтана, и моих станет в 2 раза больше, чем твоих, — сказал первый.

— У тебя и без того больше, лучше ты дай мне 2 твоих, и у нас их будет поровну, — сказал второй.

Сколько кафтанов было у обоих купцов вместе:
И) 10;
З) 12;
К) 16;
Р) 20;
Ь) 24?

10. Как называется газопровод, открытый в конце 2002 года, по которому российский газ поставляется в Турцию:
Ч) «Северное сияние»;
О) «Дружба»;
А) «Мечта»;
Э) «Союз»;
Л) «Голубой поток»?

11. Согласно Посланию Президента России, одной из целей экономического развития России на ближайшее десятилетие является двукратное увеличение валового внутреннего продукта. На сколько процентов в среднем должен расти ВВП в год для достижения этой цели:
П) 2%;
Д) 5%;
Е) 7%;
С) 10%;
Б) 15%?

12. Какому из европейских государств в 2003 году исполнилось столько же лет, сколько и экономическому отделению ОЛ ВЗМШ:
Ы) Андорре;
И) Латвии;
Й) Мальте;
А) Словении;
Т) Чехии?

Отделение «Право, нравственность, закон»

Школьникам 8–11 классов и группам «Коллективный ученик» предлагается одногодичный курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В курсе даются современные представления об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, правах человека. Разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с направленностью курса. Успешно окончившим предполагается предложить юридический курс и курс бесед об основах демократии.

Желающие должны сообщить свой полный почтовый адрес, фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено. В письмо обязательно *вложите чистый конверт с маркой и вашим адресом* (чтобы мы могли Вам ответить). На отдельном листке бумаги напишите: «Ответ на тест: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7» и под каждым номером напишите букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Небольшая подсказка: из выбранных вами букв должна получиться фамилия известного русского адвоката.

Тест

1. Вернувшись домой с работы, гражданин увидел, что квартира его вскрыта и часть вещей из нее исчезла. Естественно, он обратился в милицию. Через некоторое время подозреваемые в этом преступлении были задержаны. Какое, по-вашему мнению, обвинение может быть выдвинуто против них:
н) в разбое;
о) в грабеже;
п) в краже;
р) в мошенничестве?

2. Кто, по вашему мнению, лишний в этой «компании»:
и) Томас Джефферсон;
к) Джеймс Медисон;
л) Отто Скорцени;
м) Джордж Вашингтон?

3. Сервитут – это:
е) право ограниченного пользования имуществом;
ж) сорт колбасных изделий;
з) документ, выданный для подтверждения соответствия продукции установленным требованиям.

4. Древнегреческий философ Аристотель делил все формы государства на «правильные» и «неправильные». Как вы думаете, какую из перечисленных ниже форм он относил к правильным:
в) аристократия;
г) тирания;
д) демократия?

5. В ходе судебного разбирательства было установлено, что гражданин Н. (ответчик) нарушил своими действиями гражданские права организации, которая выступала по делу истцом. Организация потребовала от ответчика:
а) компенсации морального вреда;
б) взыскания неустойки;
в) возмещения убытков.

Какое из перечисленных требований заведомо не будет удовлетворено судом?

6. Попытайтесь определить, кто в приведенном ниже списке «лишний»:
з) Герман Греф;
и) Михаил Касьянов;
к) Антон Макаренко;
л) Элла Памфилова.

7. Профессиональное сообщество адвокатов (адвокатура):
м) входит в систему органов государственной власти;
н) входит в систему местных органов власти;
о) не входит ни в первое, ни во второе.

Отделение истории

Отделение в седьмой раз объявляет набор на курс дистантного обучения «История России». Учащимся регулярно высылаются оригинальные учебные пособия и задания, подготовленные преподавателями специально для заочного образования. Обучение на историческом отделении позволит не только жителям столицы, но и ученикам из самых отдаленных городов и деревень расширить свой кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие годовой курс обучения получают диплом.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и на что «напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться. Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки и составляют другие материалы. Последние новости из мира истории вы узнаете в числе первых!

Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Мы подскажем вам, как действовать дальше. Ведь в сущности труд историка и состоит из этих раскопок: историк-археолог копает землю и песок, отыскивая крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и превращает их в живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице и следователь, и прокурор, и адвокат времени.

Для поступления на историческое отделение необходимо выполнить следующие два задания им оформить их на двух листах бумаги.

Группы «Коллективный ученик» принимаются только по заявлению руководителя.

Задания

1. Отгадайте, кто это:

- Русский промышленник, ситцевый магнат, меценат.
- Его жена и друг, Вера Николаевна, – урожденная Мамонтова.
- Молодой купец с гидом и картой объехал все европейские музеи и сделался тонким знатоком живописи.
- В 24 года основал в своем родовом доме частную галерею русской живописи.
- В 60 лет передал свою галерею в дар Москве.
- Из всех современных ему художников предпочитал передвижников.
- Мечтал найти иконы Рублева, но удача улыбнулась другому коллекционеру.
- Стал первым директором основанного им музея, тратил на него все свои сбережения, но из скромности никогда не являлся на собственные юбилеи.
- Совершенно бескорыстен. Его бумажник всегда был открыт для нуждающихся.
- С художниками никогда не торговался. Заказывая картины, платил сполна.
- Его именем назван национальный музей и станция метро в Москве.
- Его портрет работы Репина украшает залы созданного им музея.
- Его последние слова родственникам: «Берегите галерею».

2. Опишите, не более чем в семи предложениях, политический портрет второго президента России.

(Форма записи должна быть аналогична первому заданию.)

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Министерства образования Российской Федерации при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 2004/05 учебный год.

ЗФТШ при МФТИ как федеральное государственное учреждение профильного дополнительного образования детей работает с 1966 года. За прошедшие 37 лет школу окончили около 70 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – выпускник ЗФТШ. Финансирует ЗФТШ Министерство образования Российской Федерации. Обучение в ЗФТШ для граждан, проживающих в Российской Федерации (в рамках утвержденного плана приема), бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет), который готовит специалистов по единому направлению «Прикладные математика и физика». В их подготовке принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподаватели МФТИ – крупнейшие ученые, среди которых около 100 членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель ЗФТШ при МФТИ – помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать профессиональному самоопределению учащихся.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы ЗФТШ на 2004/05 учебный год проводится на следующие отделения:

– *Заочное (индивидуальное обучение).*
Тел./факс: (095) 408-51-45.

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. на 8 – 11 классы, но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике и математике (4 задания по каждому предмету для 8 класса, 6–7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 кл.), а затем – рекомендуемые ЗФТШ авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (до 80% – выпускники ЗФТШ).

– О*чно-заочное (обучение в факультативных группах). Тел./факс: (095) 485-42-27.*

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями – физики и математики. Руководители факультативов принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа (не менее 8 человек) принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью) с указанием класса *текущего учебного года и итоговых оценок* за вступительное задание по физике и математике, телефон, факс и e-mail школы. Все эти материалы и *конверт для ответа* о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать *до 10 июня 2004 года* по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, ЗФТШ при МФТИ (с указанием «Факультатив»). *Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются.*

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как факультативные занятия по предоставлению ЗФТШ при МФТИ соответствующих сведений.

Руководители факультативов будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы ЗФТШ (программы по физике и математике, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся), информационно-рекламные материалы (газеты МФТИ «За науку», проспекты МФТИ и его факультетов с правилами приема и т.п.). Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативов, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию.

– *Очное (обучение в вечерних консультационных пунктах).*

Тел./факс: (095) 409-95-83.

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты, набор в которые проводится по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ и собеседования по физике и математике, которое проводится в первой половине сентября.

Программы ЗФТШ при МФТИ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений.

Кроме занятий по этим программам, ученикам ЗФТШ (всех отделений) предлагается участвовать в физико-математической олимпиаде «Физтех-абитуриент», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в мартовские школьные каникулы, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов, а также в конкурсах, турнирах и конференциях

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ по выбранной форме обучения, переводятся в следующий класс, а выпускникам (одинадцатиклассникам) выдается свидетельство о получении профильного дополнительного образования с итоговыми оценками по физике и математике, которое учитывается на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Вне конкурса в ЗФТШ принимаются *победители областных, краевых, республиканских, зональных и всероссийских* олимпиад по физике и математике 2003/04 учебного года. Им необходимо до 15 мая 2004 года выслать в ЗФТШ выполненную вступительную работу по физике и математике и копии дипломов, подтверждающих участие в вышеперечисленных олимпиадах.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради на русском языке. Порядок задач сохраняйте тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради.

На *лицевую* сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу:

Л.№								
№ задач	1	2	3	...	15	16	17	Σ
Ф.								
М.								

1. Область	*Воронежская*
2. Фамилия, имя, отчество	*Степанов Максим Владимирович*
3. Класс, в котором учитесь	*восьмой*
4. Номер школы	*1*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета и т.п.)	*Гимназия им. академика Н.Г.Басова при Воронежском государственном университете*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail	*394068 г. Воронеж, Московский пр., д. 15, кв. 22, 75-63-80, max@yandex.ru*
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*НПО «Заря», радиоинженер*
мать	*МУК ЦСОН «Исток», соцработник*
8. Адрес школы, телефон, факс, e-mail	*г. Воронеж, ул. К.Маркса, д. 57, 53-07-48*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Еремин Владимир Александрович*
по математике	*Михайлова Елена Игоревна*
10. Каким образом к Вам попало это объявление?	*передали друзья*

В ЗФТШ ежегодно приходит более 5 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Внимание! Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь *два одинаковых* бандерольных конверта размером 160×230 мм с наклеенными марками достоинством 7 руб. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Ученикам, зачисленным в ЗФТШ в рамках утвержденного плана приема, необходимо будет оплатить безвозмездный целевой взнос на ведение уставной деятельности школы. Сумма взноса будет составлять ориентировочно для учащихся заочного и очного отделений 300–500 руб. в год, для очно-заочного 600 – 1000 руб. (с каждой факультативной группы).

Срок отправления решения – *не позднее 1 марта 2004 года*. Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2004 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу: *141700 г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, ЗФТШ при МФТИ.*

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ (обучение платное). Желающим в него поступить следует высылать работы по адресу: 03680 г. Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Тел.: (044) 444-95-24.

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях ЗФТШ на договорной основе.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании *по математике* задачи 1–5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 2–7 – для восьмых классов, 5 – 11 – для девятых классов, 8–14 – для десятых классов.

В задании *по физике* задачи 1–5 предназначены для учащихся седьмых классов, 1, 3, 4, 8, 9, 11 – для восьмых классов, 1, 3, 5, 6, 8, 9, 11 – для девятых классов, задачи 5–8 и 10–12 – для десятых классов.

Номера классов указаны на текущий 2003/04 учебный год.

Вступительное задание по математике

1. Влажность свежескошенной травы 60%, сена 15%. Сколько сена получится из одной тонны свежескошенной травы?

2. Найдите все такие натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

3. В треугольнике ABC проведена медиана AK. Найдите величину угла A, если известно, что $AK = BK$.

4. Два грузовика одновременно вышли из A в B. Первый грузовик половину времени, затраченного им на весь путь, шел со скоростью 50 км/ч, а остальную часть времени шел со скоростью 40 км/ч. Второй грузовик первую половину пути шел со скоростью 40 км/ч, а вторую – со скоростью 50 км/ч. Какой из этих грузовиков раньше прибыл в B?

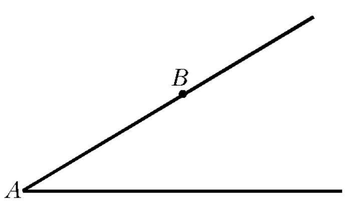


Рис. 1

5. Дан угол A и точка B на одной из сторон угла (рис.1). Найдите на другой стороне угла точку C такую, что сумма отрезков BA и BC равна заданному отрезку a

6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ a^2x^2 + 3x - y^2 = 7 \end{cases}$$

не имеет решений.

7. В треугольнике ABC (с тупым углом B) проведены высоты AD и BE. Найдите углы треугольника DEC, если известно, что $\angle BAD = 15^\circ$, $\angle ABE = 20^\circ$.

8. Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел составляют геометрическую прогрессию. Найдите a_1, a_2, a_3, если известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = 21$.

9. В вазе лежат конфеты двух сортов, причем число конфет первого сорта более чем на 20 штук превышает число конфет второго сорта. Одна конфета первого сорта весит 2 г, а конфета второго сорта – 3 г. Из вазы взяли 15 конфет одного сорта, вес которых составил 1/5 часть от веса всех конфет, лежавших в вазе. Затем было взято еще 20 конфет другого сорта; их вес оказался равным весу оставшихся в вазе конфет. Сколько конфет каждого сорта лежало первоначально в вазе?

10. В трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$) угол NPM в два раза больше угла NQM, $NP = MP = 13/2$, $MQ = 12$ Найдите площадь трапеции.

11. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$\frac{(x-1)\left((a-1)x - a - 1\right)}{x^2 - 4(x-1)} > 0.$$

Найдите все значения параметра a, при которых данное неравенство равносильно неравенству

$$x^4 + 3 > 4x\left(1 - x + x^2\right).$$

12. Длина медианы остроугольного треугольника ABC, которая проведена к его стороне длиной 6 см, равна 5 см. Найдите площадь треугольника ABC, если величины его углов A и B связаны соотношением

$$(\sin\angle A - \sin\angle B)(\sin\angle A + \sin\angle B) = \sin(\angle A - \angle B).$$

13. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[3]{y-1} = a\sqrt[5]{z+2}, \\ \sqrt[3]{y-1} + \sqrt[5]{z+2} = a\sqrt{x}, \\ \sqrt[5]{z+2} + \sqrt{x} = a\sqrt[3]{y-1}. \end{cases}$$

14. Решите уравнение

$$6\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right| = 1.$$

Вступительное задание по физике

1. Две дороги пересекаются перпендикулярно одна другой. По первой дороге по направлению к перекрестку едет машина со скоростью 60 км/ч, а по второй – трактор со скоростью 25 км/ч. Через какое время после встречи на перекрестке расстояние между машиной и трактором станет 6,5 км?

2. По дороге в горку трамвай ехал со скоростью 40 км/ч, а возвращаясь обратно по той же дороге с горки – со скоростью 60 км/ч. Чему была равна средняя скорость трамвая? *Указание*: здесь речь идет о средней скорости, равной отношению пройденного пути ко времени.

Рис. 2

3. В высокой узкой U-образной вертикальной пробирке с постоянным поперечным сечением находится вода. В левое колено аккуратно наливают керосин. На сколько различаются уровни свободной поверхности жидкостей в коленах (рис.2)? Высота столба керосина в левом колене 10 см, плотность воды 1000 кг/м^3, керосина 800 кг/м^3.

4. К воздушному шарику объемом 2 л привязаны такие грузы, что окруженный со всех сторон водой шарик свободно плавает в воде на некоторой глубине, находясь в неустойчивом равновесии. Через некоторое время часть воздуха вышла, и объем шарика уменьшился вдвое. Груз какой массы нужно снять с шарика, чтобы он остался плавать на той же глубине, что и раньше? Массой воздуха в шарике пренебречь, массой оболочки не пренебрегать. Плотность материала грузов в три раза больше плотности воды.

5. Деревянная деталь плавает в воде, погрузившись в воду на 2/3 своего объема. Как изменится архимедова сила, действующая на деталь, если ее поместить в керосин? Какую минимальную силу нужно будет приложить, чтобы полностью «утопить» деталь в керосине? Плотность воды 1000 кг/м^3, керосина 800 кг/м^3, масса детали 400 г.

6. По горизонтальной поверхности, прикладывая постоянную силу F, равномерно тащат два одинаковых бруска, скрепленных легкой нерастяжимой нитью (рис.3). На второй брусок кладут с нулевой скоростью относительно брусков еще один такой же брусок. В результате к некоторому моменту времени скорость брусков уменьшается вдвое при прежней силе F. Во сколько раз в этот момент сила натяжения нити больше силы натяжения нити, когда два бруска скользили равномерно?

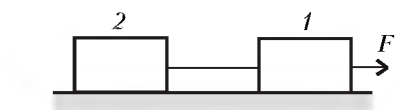


Рис. 3

7. По наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30° вверх толкнули небольшое тело. Тело поднялось на высоту 1 м, после чего вернулось обратно. Во сколько раз импульс тела в момент прохождения через точку толкания меньше начального импульса? Коэффициент трения тела о плоскость 0,2.

8. При некоторых условиях чистую воду без посторонних примесей можно охладить до температуры −5 °С. Если после этого какой-либо предмет, например песчинка, попадет в переохлажденную воду, то мгновенно начинается кристаллизация. Какая часть воды замерзнет при этом? Потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг.

9. График зависимости температуры воды в чайнике от времени показан на рисунке 4. Оцените массу воды в чайнике. Сколько времени вода будет кипеть? Мощность чайника 2,1 кВт. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования 2,3 МДж/кг. Потерями тепла пренебречь.

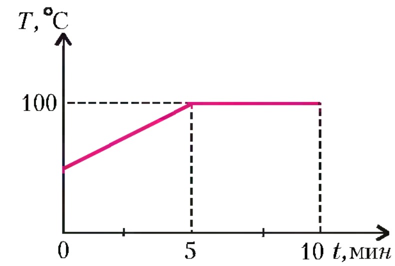


Рис. 4

10. В античные века для погружения под воду использовали колокол. Естествоиспытатель помещался под колокол, после чего вся конструкция медленно погружалась в воду. Оцените объем воды, которая зальется в колокол без естествоиспытателя после погружения на глубину 30 м. Объем колокола принять равным 1,6 м^3. Температуру считать постоянной.

11. К городской электрической сети напряжением 220 В подключена лампочка мощностью 100 Вт. Лампочку какой мощности нужно подключить последовательно к первой лампочке, чтобы количество теплоты, выделяемое первой лампочкой, уменьшилось вчетверо? Сопротивление лампочек считать постоянным.

12. На высоте H над закрепленным шариком с зарядом Q находится шарик, заряд которого $Q/3$, а масса m. Верхний шарик отпускают, и он начинает падать по направлению к нижнему шарику. На какое минимальное расстояние h сблизятся шарики? Считать, что радиусы шариков много меньше h и верхний шарик движется по вертикали.

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (сокращенно – СУНЦ) МГУ – школа имени академика А.Н.Колмогорова, СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПбГУ объявляют набор учащихся в 10 классы (двухгодичное обучение) на физико-математическое и химико-биологическое отделения и в 11 классы (одногодичное обучение) на физико-математическое отделение. В рамках двухгодичного физико-математического отделения, кроме основного профиля, выделяются компьютерно-информационный и биофизический классы (СУНЦ МГУ). Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу проводится на конкурсной основе по итогам двух туров. Первый тур – заочный письменный экзамен по математике, физике и химии. Успешно выдержавшие заочный экзамен в апреле–мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены. Однако допускается участие в очном туре школьников, не участвовавших в заочном туре.

Ниже приводятся условия задач заочного вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради, на обложке которой указываются фамилия, имя, отчество (полностью), желаемый профиль обучения, подробный домашний адрес с индексом, электронный адрес (если имеется), адрес и номер школы, класс.

Работу нужно отправить простой бандеролью на имя Приемной комиссии по одному из следующих адресов (обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на ваш домашний адрес):

121357 Москва, Кременчугская ул.,11, СУНЦ МГУ (внимание: жители Москвы принимаются в школу без предоставления общежития, телефон для справок 445-11-08);

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9б, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, СУНЦ НГУ (Олимпиадный комитет).

Срок отправки работ – *не позднее 10 марта 2004 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если вы не сможете решить все задачи – не отчаивайтесь, Приемная комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Вступительные экзамены второго, очного тура будут проводиться с 20 марта по 20 мая по регионам.

Вступительное задание заочного тура

Математика

Для поступающих в 10 класс

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=\frac{x+2}{3}.$$

2. В трапеции $ABCD$ на основаниях $AD = 12$ и $BC = 8$ взяты точки E и F соответственно. Найдите EF, если $AE = 5$, $BF = 3$, $\angle B + \angle C = 270°$.

3. Найдите сумму цифр всех десятизначных чисел.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Периметр треугольника $A_1B_1C_1$ равен P. Найдите площадь треугольника ABC, если радиус окружности, описанной около этого треугольника равен R.

5. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x_1^2+(3-x_2)^2}+\sqrt{x_2^2+(1-x_3)^2}+$$
$$+\sqrt{x_3^2+(3-x_4)^2}+\sqrt{x_4^2+(2-x_1)^2}.$$

Для поступающих в 11 класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-2y}=3y,\\ x-y=2y^2+1.\end{cases}$$

2. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC, причем $CH = AB = 1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AHC.

3. Найдите сумму цифр в десятичной записи всех натуральных чисел от 1 до 10^n.

4. В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ точки K и L лежат на сторонах AB и CD соответственно, причем $\frac{BK}{KA}=\frac{DL}{LC}=\frac{1}{3}$. В каком отношении делит площадь трапеции прямая KL, если $AD = 2\,BC$?

5. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x_1^2+(1-x_2)^2}+\ldots+\sqrt{x_n^2+(1-x_1)^2}.$$

Физика

(физико-математическое отделение)

Для поступающих в 10 класс

1. Пассажир, опоздавший на поезд, выйдя на перрон, увидел, что предпоследний вагон прошел мимо него за интервал времени $\tau_1 = 10$ с, а последний – за интервал времени $\tau_2 = 8$ с. Найдите интервал τ между моментами отправления поезда и выхода пассажира на перрон. Движение поезда считать равноускоренным.

2. Веревка выдерживает груз массой не более $m_1 = 100$ кг, если груз неподвижен. На этой веревке поднимают груз массой $m_2 = 50$ кг. Найдите предельную высоту H, на которую можно поднять этот груз с постоянным ускорением за интервал времени $\tau = 2$ с.

3. Однородный стержень изогнут в форме прямого угла AOB со сторонами $AO = a$ и $BO = b$ $(b > a)$. Найдите расстояние OC от вершины угла до центра тяжести стержня.

4. В цилиндрическом сосуде плавает плитка пенопласта, на которой лежит кубик. Когда кубик сняли, уровень воды понизился на $h_1 = 15$ см. Затем кубик опустили в воду. Уровень воды поднялся на $h_2 = 5$ см. Найдите плотность материала кубика ρ.

5. Колодец должен иметь глубину $H = 5$ м. Найдите глубину колодца h, когда была выполнена работа, равная $1/4$ всей необходимой наименьшей работы.

Для поступающих в 11 класс

1. Автомобиль начинает двигаться из состояния покоя. Первую половину пути он движется с постоянным ускорением. На втором участке пути он движется с постоянной скоростью $v = 18$ м/с, которой достиг в конце первого участка. Найдите среднюю скорость автомобиля $v_{ср}$.

2. На рисунке 1 изображены графики двух процессов $a \to b$ и $a \to c$ в координатах давление-объем. Точки b и c лежат на изотерме. Найдите отношение работ A'_{ac}/A'_{ab}, совершаемых газом в процессах $a \to c$ и $a \to b$.

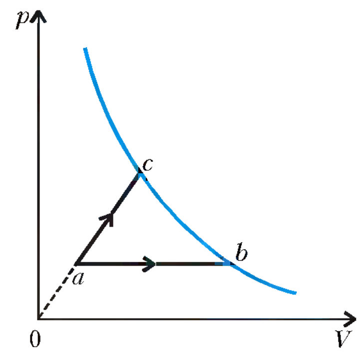


Рис. 1

3. В камере объемом $V_1 = 1$ м^3 находятся влажный воздух при давлении $p_1 = 3p_{атм}$, где $p_{атм} = 10^5$ Па, и вода, объем которой значительно меньше V_1. После изотермического увеличения объема в два раза относительная влажность воздуха оказалась равной $\varphi = 80\%$, а давление в камере составило $p_2 = 1{,}8p_{атм}$. Найдите температуру камеры T_1.

4. Частица находится на прямой, проходящей через центр тонкого кольца перпендикулярно плоскости кольца. Заряд и масса частица равны $q_1 = -Q$ и m. По кольцу массой m и радиусом R равномерно распределен заряд $q_2 = Q$. В начальном положении частица находилась на расстоянии $s = \sqrt{3}R$ от центра кольца. Найдите величину относительной скорости v_0 в момент прохождения частицей центра кольца.

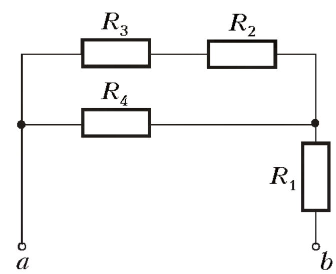


Рис. 2

5. В схеме, приведенной на рисунке 2, четыре резистора имеют равные сопротивления. Разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b = 10$ В, резистор R_1 потребляет мощность $P_1 = 18$ Вт. Найдите напряжение U_4 на резисторе R_4.

Химия

(химико-биологическое отделение)

1. При рентгеновском исследовании желудка и пищевода пациент выпивает 1–2 стакана водной взвеси «нерастворимого» сернокислого бария. Известно, что насыщенный раствор $BaSO_4$ содержит 0,00001 моль соли в литре. Сколько штук «молекул» сульфата бария содержится в 1 мл такого раствора? Сколько граммов сульфата бария растворено в 1 мл?

2. При переработке медной руды – халькопирита $CuFeS_2$ – ее обжигают, и сера превращается в оксид серы (IV). Этот оксид серы на 90% улавливается заводскими фильтрами. Красноуральский медеплавильный комбинат выбрасывает в год в атмосферу 64 тысячи тонн оксида серы (IV). Напишите уравнение реакции обжига халькопирита (в кислороде). Сколько тонн меди может производить этот комбинат в год? Какое еще соединение серы может образовываться при обжиге и почему?

Материалы вступительных экзаменов 2003 года

Московский физико-технический институт (государственный университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проходит через вершины A и B, касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке E. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 5\sqrt{2}$, $CD = 10\sqrt{13}$.

2. Решите уравнение

$$\cos x + |\sin x| + \sin 4x = -\cos 2x .$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{3\ln^2(x-1)^2 + \ln^2(x+1)} > \ln(x-1)^2 + \ln(x+1) .$$

4. Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4|y|, \\ |x| + |y| \ge 2, \\ y^2 - x^2 + 16 + 8y \ge 0. \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры, координаты которой удовлетворяют а) первому неравенству системы; б) первым двум неравенствам системы; в) всем трем неравенствам системы.

5. Найдите все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 + 21x = \dfrac{y}{x} + 4\sqrt{y-3x}, \\ \sqrt{y - \sqrt{y-3x}} = y + 7x - 2. \end{cases}$$

6. Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра DA, DB и DC, а ее центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 4, двугранный угол между гранями ABC и ABD равен $\operatorname{arctg}\left(1/\sqrt{6}\right)$, ребро AB = 24. Найдите объем пирамиды $ABCD$ и радиус описанной вокруг $ABCD$ сферы.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}\left(2\cos^2 x - \sin^2 x \cos 2x - 1\right) = 1 .$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8} - 4} < \frac{1}{2|x-5| - 5} .$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\log_3(2-3x-4y)-1}{\log_3(x-2y-4)} = \dfrac{\log_5(2x-y-5)}{\log_5(1-2x-3y)}, \\ 2y^2 + xy + 2x = x^2 + y + 1. \end{cases}$$

4. В трапеции $ABCD$ с большим основанием BC и площадью, равной $12\sqrt{3}$, прямые BC и AD касаются окружности диаметра $2\sqrt{3}$ в точках B и D соответственно. Боковые стороны трапеции AB и CD пересекают окружность в точках M и N соответственно. Длина MN равна 3. Найдите величину угла MDN и длину основания BC.

5. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2|x| + 3|y| + |3x + 2y| = 11, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два действительных решения.

6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите радиус сферы, касающейся а) ребер CB, CC_1, CD и плоскости B_1AD_1; б) ребер CB, CC_1, CD и прямой AD_1.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\frac{|\cos 5x \cos 3x| - \sin 3x \sin 5x}{\cos 2x} = 2\sin 2x .$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{4 - \frac{\sqrt{33 + 32x^3}}{2}} < 2 + x .$$

3. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AC = 6$, высота $AD = \dfrac{24}{5}$. На биссектрисе CE выбрана точка F такая, что $CF = \dfrac{CE}{4}$. Через точку F проведена прямая l, параллельная BC. Найдите расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник ABC, до прямой l.

4. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, $AC = 6$. Высота призмы равна $\sqrt{6}$. На ребрах A_1C_1, A_1B_1 и AC выбраны точки D_1, E_1 и D соответственно так, что $A_1D_1 = \dfrac{A_1C_1}{4}$, $A_1E_1 = B_1E_1$, $CD = \dfrac{AC}{3}$, и через эти точки проведена плоскость Π. Найдите: 1) площадь сечения призмы плоскостью Π; 2) угол между плоскостью Π и плоскостью ABC; 3) расстояние от точек A и A_1 до плоскости Π.

5. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$ax^2 + (4a - 7)x + 4a - 5 = 0$$

имеет в точности один корень на отрезке $[-4; 0]$.

6. Решите систему

$$\begin{cases} 2yz^2 - 4xy^2 + zx^2 = 3xyz, \\ 2yx^2 + 4zy^2 - xz^2 = 3xyz, \\ 2xy + xz - 2yz = 3. \end{cases}$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Предположим, что между Калининградской и Московской областями прорыт прямолинейный железнодорожный тоннель длиной $l = 1000$ км. Вагон ставят на рельсы в начале тоннеля в Московской области и отпускают без начальной скорости. 1) Через какое время вагон достигнет Калининградской области? 2) Найдите максимальную скорость вагона. Землю считать шаром радиуса $R = 6400$ км с одинаковой плотностью по всему объему. Вращение Земли, сопротивление воздуха и все виды трения при движении не учитывать.

2. Тонкая пробирка частично заполнена водой и расположена вертикально открытым концом в атмосферу. Вследствие диффузии в пробирке устанавливается линейное изменение концентрации пара с высотой: вблизи поверхности воды пар оказывается насыщенным, а у верхнего открытого конца пробирки его концентрация в 2 раза меньше. Пробирку сверху закрывают крышкой. После установления равновесия оказалось, что плотность влажного воздуха внутри пробирки отличается от плотности сухого атмосферного воздуха вдали от пробирки на $\Delta\rho = 5$ г/м^3. Найдите давление насыщенного пара при температуре опыта $t = 27$ °C. Молярная масса воздуха $\mathrm{M_в} = 29$ г/моль, молярная масса воды $\mathrm{M_{воды}} = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Указание. Изменением уровня жидкости в пробирке во время опыта пренебречь.

3. В электрической схеме, представленной на рисунке 1, ключ K разомкнут. ЭДС батарей $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, емкости конденсаторов $C_1 = C_2 = C$. 1) Найдите заряд, протекший через батарею с ЭДС $\mathcal{E}_2$ после замыкания ключа K. 2) Какое количество теплоты выделилось в цепи после замыкания ключа?

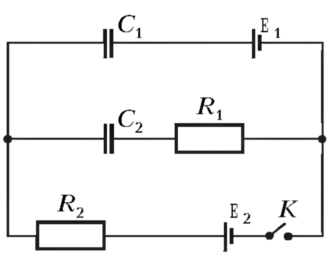


Рис. 1

4. Тонкое проволочное кольцо радиусом a расположено в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости кольца (рис. 2). По кольцу скользят в одном направлении две перемычки с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$). Перемычки и кольцо сделаны из одного куска провода, сопротивление единичной длины которого равно ρ. Определите величину и направление тока через перемычки, когда угол между ними равен $\varphi = \pi/2$. Между перемычками в точке O и между кольцом и перемычками хороший электрический контакт.

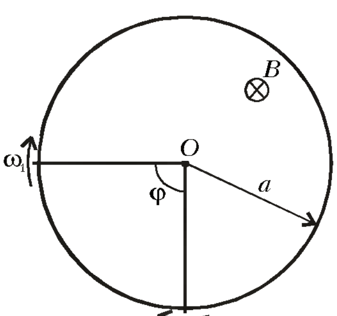


Рис. 2

5. На прозрачную усеченную призму, ширина верхнего основания которой $D = 0{,}4$ см, падает узкий пучок монохроматического света параллельного плоскости оснований (рис. 3). Угол при вершине призмы $\alpha = 0{,}2$ рад, высота призмы $L = 10$ см. Показатель преломления стекла в направлении x от верхнего основания призмы изменяется по закону $n(x) = 1{,}4(1 - x/(7L))$. На каком расстоянии a от верхнего основания надо пустить пучок света, чтобы, пройдя сквозь призму, он не изменил своего направления? Для малых углов $\sin\alpha \approx \alpha \approx \mathrm{tg}\,\alpha$.

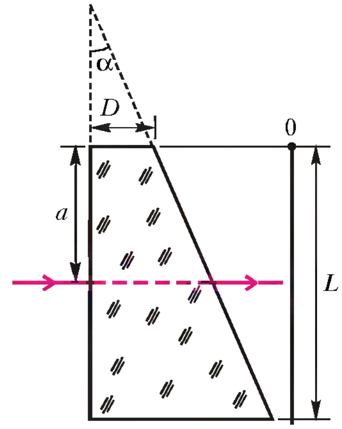


Рис. 3

Вариант 2

1. Обручу, закрученному вокруг горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно плоскости обруча через его центр, сообщают вдоль горизонтальной поверхности стола скорость $\vec{v}_0$, направленную перпендикулярно оси вращения (рис. 4). Обруч сначала удаляется, а затем, из-за трения о стол, возвращается к месту начала движения со скоростью $v_1 = v_0/4$, катясь без проскальзывания. Коэффициент трения скольжения между обручем и столом μ. 1) Найдите время движения до места максимального удаления. 2) Через какое время, считая от начала движения, обруч возвратится назад?

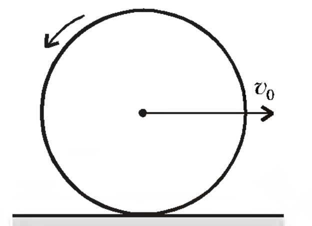


Рис. 4

2. Шарик висит на пружине в поле тяжести $\vec{g}$. В положении равновесия в пружине запасена некоторая энергия деформации U_0. Вертикальным толчком шарику сообщается кинетическая энергия, равная $3U_0$. 1) Чему равна величина максимального ускорения шарика a_m во время возникших вертикальных колебаний груза?

2) Чему равна кинетическая энергия движения шарика в момент, когда его ускорение равно $a = a_m/3$?

3. Газ фотонов из начального состояния *1* расширяется в изотермическом процессе *1–2*, а затем охлаждается в изохорическом процессе *2–3* (рис. 5). В конечном состоянии *3* его внутренняя энергия оказалась равной начальной. В процессе *1–2–3* температура газа уменьшилась в два раза, и к газу пришлось подвести количество теплоты Q. Найдите внутреннюю энергию газа фотонов в начальном состоянии.

Рис. 5

Указание. В пустом сосуде переменного объема V, температура стенок которого T, возникает равновесный газ фотонов, которые излучаются и поглощаются стенками сосуда. Внутренняя энергия этого газа $U = \alpha T^4 V$, где $\alpha = \mathrm{const}$. Давление газа фотонов определяется только его температурой: $p = \alpha T^4/3$.

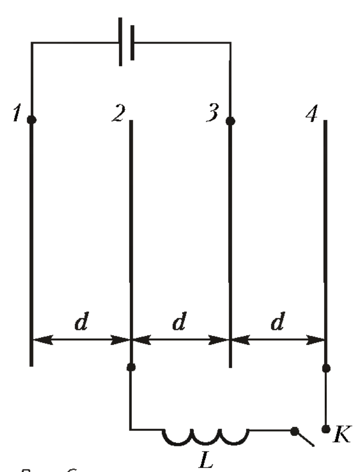


Рис. 6

4. В электрической схеме (рис. 6), состоящей из батареи с неизвестной ЭДС, катушки индуктивностью L и четырех проводящих пластин, каждая площадью S, расположенных на расстоянии d друг от друга, ключ K разомкнут. После замыкания ключа максимальный ток, протекающий через катушку, равен I_0. 1) Определите ЭДС батареи. 2) Найдите заряды пластин после замыкания ключа K в тот момент, когда ток через катушку максимален. Считать, что $S \gg d^2$. Омическим сопротивлением в цепи пренебречь.

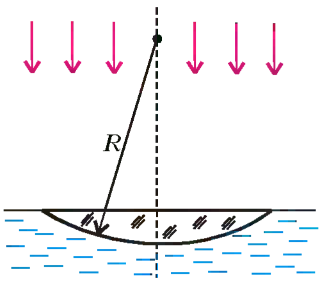


Рис. 7

5. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием F = 20 см выпуклой стороной, радиус кривизны которой R = 15 см, притоплена в воду (рис.7). Показатель преломления воды n = 1,33. На каком расстоянии от линзы получится изображения Солнца, находящегося в зените?

Публикацию подготовили Р.Константинов, В.Можаев, Ю.Чешев, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите неравенство

$$\frac{|3x-2|-7}{x+1} \ge -1.$$

2. Решите уравнение

$$9x^2 - \sqrt{3x^2-2x} = 2+6x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{9}}(x+6) \le \log_{\frac{1}{3}}(x-2) - 1.$$

4. Решите уравнение

$$31\operatorname{tg} 2x + 8\cos x = 0$$

и найдите сумму всех корней этого уравнения, которые принадлежат промежутку $[-3\pi; 6\pi]$.

5. Найдите все значения a, при которых функция

$$y = x^3 - a^2x^2 + (15a+9)x - 7$$

имеет максимум в точке x = 3.

6. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AB = AD = 1$, $AA_1 = 2$). Найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью AB_1D_1.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{\sqrt{4x^2+32x+64}-8}{x} = a(x+6)$$

имеет единственное решение.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики, экономико-математический)

1. Решите неравенство

$$\sqrt{2x^2-3x} > 3x-6.$$

2. Решите уравнение

$$27\cdot 4^{|x|} + 13\cdot 4^x = 120.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$3\operatorname{ctg} 2x + 18\operatorname{ctg} x = 2,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x < -\frac{1}{4}$.

4. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{2x-1}{x^2-2x+3}.$$

5. При каких значениях a касательная к графику функции

$$y = \sqrt{6ax - x^2 - 5a^2}$$

проходит через точку $(2; \sqrt{3})$ и образует с осью Ox угол 30°?

6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. На ребре CC_1 взята точка M так, что $CM = a/4$, а на ребре DD_1 взята точка N так, что $ND_1 = a/2$. Найдите объем пирамиды, вершина которой совпадает с точкой C, а основанием является сечение куба плоскостью, проходящей через точки B, M, N.

7. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$2\sqrt{2}\sin x + 2\sqrt{2}\cos x + 3\sin 2x = a$$

имеет решение.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Гармонические колебания. Амплитуда, частота и период колебаний. Колебания на пружине.

2. С какой скоростью тело бросили с поверхности земли, если на высоте h = 15 м тело имело скорость v = 10 м/с? Сопротивление воздуха не учитывать.

3. Определите максимальное значение КПД теплового двигателя, работающего в температурном диапазоне от $t_1 = 20$ °С до $t_2 = 300$ °С.

4. Какой силы ток течет через амперметр с пренебрежимо малым сопротивлением в цепи, показанной на рисунке 1, если R = 400 Ом и $U_{AB} = 0{,}30$ В?

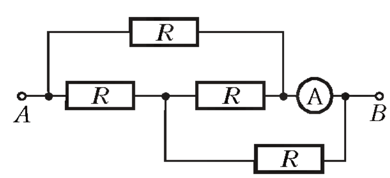


Рис. 1

5. Во время праздничного салюта снаряд, выпущенный вертикально вверх, разорвался в верхней точке траектории на равных два осколка. Через время t = 0,25 с расстояние между осколками стало равным s = 15 м. Определите скорость осколков сразу после взрыва.

Вариант 2

1. Масса. Сила. Второй закон Ньютона. Сложение сил.

2. С какой минимальной скоростью надо бросить тело с поверхности земли, чтобы оно достигло высоты h = 25 м? Сопротивление воздуха не учитывать.

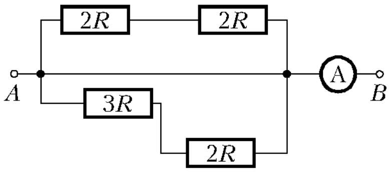


Рис. 2

3. Какой силы ток течет через амперметр с пренебрежимо малым сопротивлением в цепи, показанной на рисунке 2, если $R = 400$ Ом и $U_{AB} = 0,80$ В ?

4. Два одинаковых металлических шара удалены на большое расстояние друг от друга. Энергия одного шара $W_1 = 2,5$ мДж, а второго $W_2 = 10$ мДж. Какое количество теплоты выделится после соединения шаров тонким проводником?

5. Деревянная палочка длиной $L = 60$ см и площадью сечения $S = 0,64$ см^2, шарнирно закрепленная за один конец, плавает в воде, погрузившись наполовину. Определите силу, действующую на палочку со стороны шарнира. Плотность воды $\rho_в = 1,0$ г/см^3.

Публикацию подготовили Ю.Сезонов, Ю.Колмаков

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos^4 14x - \sin^4 14x = \cos 9x .$$

2. Решите неравенство

$$\left(1 + \log_2\left(2x^2 + x + 1\right)\right) \cdot \log_{|6-2x|} 2 \geq 1 .$$

3. В прямоугольный треугольник с катетами 6 и 18 вписан прямоугольник наибольшей площади, две стороны которого лежат на катетах треугольника. Найдите периметр этого прямоугольника.

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $4\sqrt{3}$ точки M и N принадлежат ребрам BB_1 и CC_1 соответственно, причем длины отрезков BM и CN равны половине стороны основания. Найдите расстояние от середины ребра BC до плоскости AMN.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = 12, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Вариант 2

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin^4 12x - \cos^4 12x = \cos 9x .$$

2. Решите неравенство

$$12 + \left(\log_{0,25}(x+3)^2\right)^2 \geq 16 \log_4 |x+3| .$$

3. Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны 15. Найдите другое основание такой трапеции наибольшей площади.

4. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания a боковая грань образует с плоскостью основания угол α. Через центр основания проведена плоскость, параллельная боковой грани. Найдите площадь полученного сечения.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 20 + 5^x = 5^{-y}, \\ 3 - x + y = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$4^{x^2+5x} = 16^{x^2+3} .$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_{7-x} 0,5}{\log_3 0,2} \geq 0 .$$

3. Решите уравнение

$$\cos x \cos 3x + \sin 5x - \sin 3x \sin x = 0 .$$

4. Напишите уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^5 - 5\sqrt[5]{x} + 1$$

в точке этого графика с абсциссой 1.

5. В конус вписана правильная треугольная пирамида так, что их вершины совпадают. Найдите отношение объема конуса к объему пирамиды.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом 12 и гипотенузой 20, а все боковые ребра пирамиды равны 26. Найдите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$0,5 \sin^2 x = \cos\frac{x}{2} - \frac{\cos^2 x}{2} .$$

3. Решите неравенство

$$2^{\frac{2x-1}{3-x} + 2x} \leq 2$$

и укажите его наибольшее целое решение.

4. Решите уравнение

$$\log_5\left(50 - 5^x\right) = x .$$

5. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$y(x) = \frac{3}{2}\cos\frac{2x}{3} - 3x .$$

Вариант 5

(факультет технологии и предпринимательства)

1. Решите уравнение

$$6 \cdot 5^x = 13 - 7 \cdot 25^x .$$

2. Решите неравенство

$$\log_5 x + \log_5(x+2) > \log_5 1,25$$

и найдите его наименьшее целое решение.

3. Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} + 8 \operatorname{ctg} 2x - \cos\frac{7\pi}{2} = 0 .$$

4. Найдите высоту правильного тетраэдра, если его объем равен 72.

5. Найдите минимум функции

$$y = e^{x+2} \cdot x^6 - \sqrt{18} .$$

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$9^{\sin^2 x}+72=3\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos^2 x-3}.$$

2. Решите уравнение

$$\cos\frac{314\pi}{5}\sin\frac{385\pi}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=0.$$

3. Решите неравенство

$$(3x+4)\sqrt{1-3x}\le 3x+4.$$

4. Решите неравенство

$$6^{\lg\cos 6\pi}\le\log_{x^2}(9-8x).$$

5. Функция f определена и строго убывает на $\boldsymbol{R}$. Решите неравенство

$$f(|x-1|-1)>f(|5x+2|).$$

6. Найдите все значения параметра b, при которых множество решений системы неравенств

$$\begin{cases}81^{x-2}\le 9^{8b+13},\\ 36^{x+2}\ge 6^{8b+15}\end{cases}$$

симметрично относительно точки $x=7$.

7. При каких значениях q сумма кубов корней уравнения

$$x^2+2x-q=0$$

равна -16?

8. Найдите значение выражения

$$25x^2+x^{-2}-9,$$

если $-5x+x^{-1}=-5$.

9. Упростите выражение

$$f(4-x)+f(4+x),$$

если $-2<x<0$ и

$$f(x)=\frac{(x-2)^{0,5}+(6-x)^{0,5}}{(x-2)^{0,5}-(6-x)^{0,5}}+\frac{(x-2)^{0,5}-(6-x)^{0,5}}{(x-2)^{0,5}+(6-x)^{0,5}}.$$

10. Сравните значения выражений

$$\frac{1}{\log_2 102}+\frac{1}{\log_3 102}+\frac{1}{\log_{17} 102}$$

и

$$\log_3 2\cdot\log_{17} 3\cdot\log_2 17.$$

11. Вычислите

$$\frac{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}.$$

12. Постройте график функции

$$y=|\sin\arcsin(2-x)+\cos\arccos(2-x)|.$$

13. Прямая касается графика функции

$$f(x)=4x^2-4x+5+\ln 10\cdot\lg(x+3)$$

в точке с абсциссой $x=-1$. Найдите точки пересечения этой прямой с осями координат.

14. Точки P и Q – середины ребер AB и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a. Постройте сечение куба плоскостью PQC_1 и найдите расстояние от точки C до плоскости PQC_1.

15. На катетах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены окружности. Определите длину их общей хорды, если катеты равны 6 и 8.

ФИЗИКА

Физический факультет

Письменный экзамен

Вариант 1

Часть 1. Выберите правильный ответ

1. Как движется тело, если сумма всех действующих на него сил равна нулю: а) неравномерно; б) прямолинейно и равномерно; в) равномерно по окружности?

2. Под действием какой силы изменяется направление движения камня, брошенного горизонтально: а) силы упругости; б) силы тяжести; в) веса тела?

3. Изменение высоты тела над поверхностью Земли с течением времени представлено на рисунке 1. Что можно сказать о характере движения тела: а) тело движется по параболе; б) тело движется равномерно; в) тело движется с некоторым ускорением?

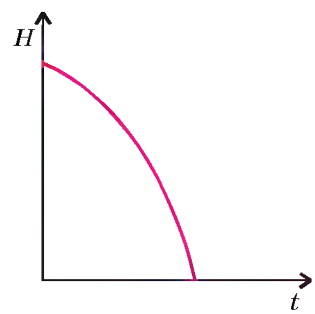


Рис. 1

4. Состояние невесомости возникает, когда тело имеет: а) равную нулю массу; б) равный нулю вес; в) равную нулю скорость.

5. Как направлена напряженность электростатического поля, созданного двумя одинаковыми зарядами q_1 и q_2, в точке O, равноудаленной от зарядов (рис.2): а) направлена в сторону заряда q_1; б) направлена в сторону заряда q_2; в) напряженность равна нулю?

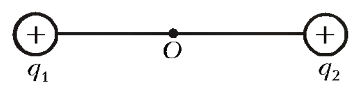


Рис. 2

6. Как изменится емкость конденсатора, если в воздушный зазор между пластинами, не изменяя расстояния между ними, внести стекло: а) увеличится; б) уменьшится; в) не изменится?

7. При каком соединении конденсаторов (рис.3) их суммарная емкость будет больше: а) в случае 1); б) в случае 2); в) емкость будет одинакова?

8. По какой схеме (рис.4) нужно включить амперметр, чтобы измерить силу тока через резистор R: а) по схеме 1); б) по схеме 2); в) обе схемы равноправны?

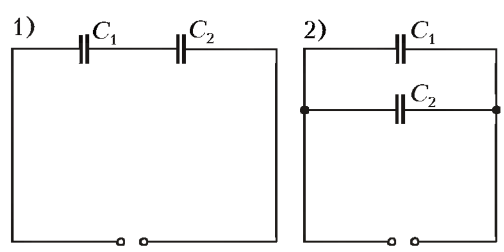


Рис. 3

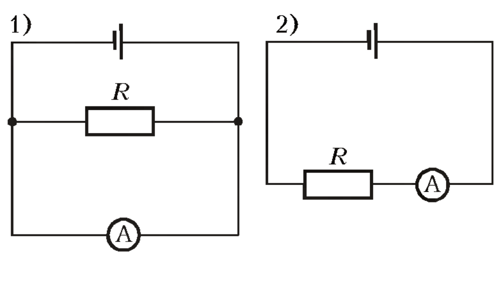


Рис. 4

9. Какое выражение можно использовать для определения массы m_0 молекулы: а) $m_0 = m/N_A$; б) $m_0 = \rho/n = \text{М}/N_A$; в) $m_0 = m/\text{М}$? Здесь m – масса вещества, N_A – постоянная Авогадро, n – концентрация молекул, ρ – плотность вещества, М – молярная масса вещества.

10. Какой из графиков (рис.5) характеризует изохорный процесс: а) график 1); б) график 2); в) график 3)?

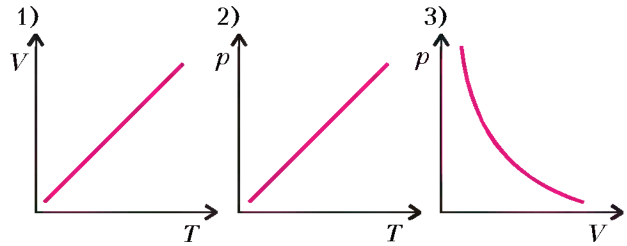


Рис. 5

11. Какое выражение следует применить для определения количества теплоты Q, поглощенного телом при нагревании: а) $Q = c(T_2 - T_1)$; б) $Q = \frac{cm}{\text{М}}(t_2 - t_1)$; в) $Q = cm(T_2 - T_1)$? Здесь c – удельная теплоемкость, m – масса вещества, t и T – температура по шкале Цельсия и Кельвина соответственно.

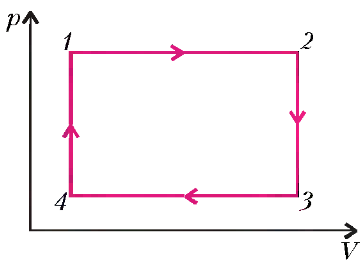


Рис. 6

12. На каких участках цикла тепловой машины (рис.6) газ получает тепло от нагревателя: а) *1 – 2* и *4 – 1*; б) *1 – 2* и *3 – 4*; в) *2 – 3* и *4 – 1*?

13. Какова, в сравнении со скоростью света в вакууме c, скорость распространения альфа-лучей: а) больше c; б) меньше c; в) такая же?

14. Где раньше находился вылетающий при бета-распаде ядра электрон: а) в электронной оболочке атома; б) внутри ядра; в) не существовал вовсе?

15. Что необходимо делать с частотой переменного электрического поля в ускоряющих промежутках синхрофазотрона по мере роста энергии ускоряемых частиц: а) увеличивать; б) уменьшать; в) поддерживать неизменной?

16. Чем обусловлено размытие контуров тени от предмета: а) дифракцией света; б) интерференцией света; в) прямолинейностью распространения света?

Часть 2. Решите задачи

17. Разноименные заряды 10^{-9} Кл и $-4 \cdot 10^{-9}$ Кл закреплены на расстоянии 12 см друг от друга. Какой надо взять третий заряд и где его следует поместить, чтобы система всех трех зарядов находилась в равновесии?

18. Какая частица обозначена буквой X в реакции

$$^{10}_{5}\text{B} + ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow ^{13}_{7}\text{N} + X\ ?$$

19. Из некоторой жидкости на границу ее раздела с воздухом падает луч света. Угол падения равен 30°. Отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Найдите показатель преломления жидкости.

Вариант 2

Часть 1. Выберите правильный ответ

1. Как изменится скорость движения тела, если действие на него других тел прекратится: а) не изменится; б) увеличится; в) уменьшится?

2. На рисунке 7 изображен график изменения координаты велосипедиста со временем. В течение какого промежутка времени скорость велосипедиста уменьшалась: а) от 0 до 3 с; б) от 3 до 5 с; в) от 5 до 7 с?

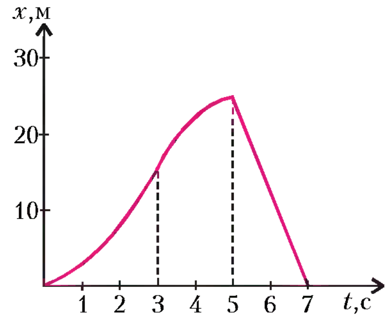


Рис. 7

3. При свободном падении тела из состояния покоя его скорость за вторую секунду увеличивается на: а) 5 м/с; б) 10 м/с; в) 20 м/с.

4. Работа постоянной силы равна: а) произведению модулей векторов силы и перемещения; б) произведению силы и массы; в) произведению модулей векторов силы и перемещения и косинуса угла между ними.

5. Какой знак имеет заряд, помещенный в электрическое поле, если вектор силы, действующей на заряд, совпадает по направлению с вектором напряженности поля: а) положительный; б) отрицательный; в) направление силы не зависит от знака заряда?

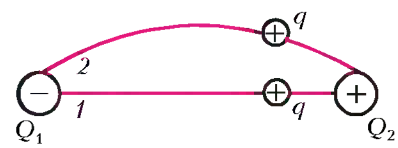


Рис. 8

6. Заряд q перемещается по одной из линий напряженности электрического поля, созданного зарядами Q_1 и Q_2 (рис.8). В каком случае работа по перемещению заряда q наибольшая: а) в случае 1; б) в случае 2; в) одинакова?

7. При каком соединении резисторов R_1 и R_2 (рис.9) их общая проводимость уменьшится: а) в случае 1); б) в случае 2); в) проводимость не зависит от способа соединения?

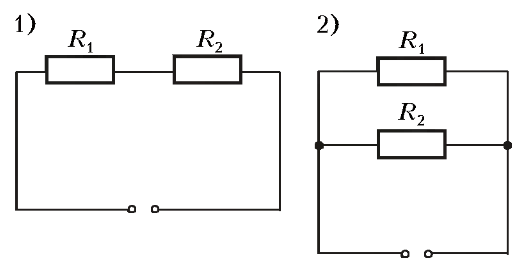


Рис. 9

8. Почему с повышением температуры полупроводников их сопротивление увеличивается: а) увеличивается концентрация свободных носителей заряда; б) увеличивается скорость движения носителей заряда; в) уменьшается концентрация свободных носителей заряда?

9. Какое из приведенных соотношений верно: а) −173 °С = = −446 К; б) 27 °С = 300 К; в) 430 °С = 216 К?

10. Какой из графиков (рис.10) характеризует адиабатный процесс, если на графике *1* изображен изотермический процесс: а) график *2*; б) график *3*; в) ни один из графиков?

11. Выберите правильное выражение для средней кинетической энергии $E_{\text{к ср}}$ молекул идеального газа:

а) $E_{\text{к ср}} = 3/2\,kT$; б) $E_{\text{к ср}} = 3/2\,kt$; в) $E_{\text{к ср}} = 3/2\,RT$.

Здесь t и T – температура по шкале Цельсия и Кельвина соответственно, k – постоянная Больцмана, R – универсальная газовая постоянная.

12. Что происходит с жидкостью при испарении в отсутствие подвода тепла: а) объем уменьшается, температура не изменяется; б) объем уменьшается, температура растет;

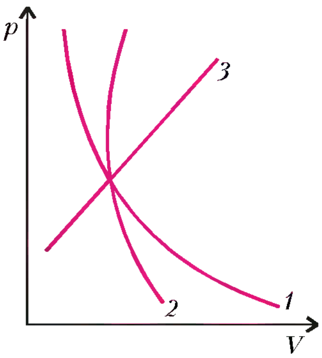


Рис. 10

в) объем и температура уменьшаются?

13. Как изменяется период полураспада альфа-радиоактивных ядер ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ при нагревании: а) возрастает; б) убывает; в) не изменяется?

14. Какое из перечисленных ниже радиоактивных превращений сопровождается наибольшим изменением массы ядра: а) альфа-распад; б) бета-распад; в) гамма-излучение?

15. Предельным углом полного внутреннего отражения называется: а) любой угол падения, при котором свет не проходит во вторую среду; б) угол падения, соответствующий углу преломления 90°; в) угол падения, равный 90°.

16. Металлическую пластину подвергли интенсивному рентгеновскому облучению. Какой заряд приобрела пластина: а) положительный; б) отрицательный; в) не приобрела никакого?

Часть 2. Решите задачи

17. В направленном вертикально вниз электрическом поле напряженностью 500 В/см движется пылинка массой 10^{-6} г с ускорением 19,6 м/с^2. Найдите знак и величину заряда пылинки.

18. Температура воздуха равна 20 °С, точка росы составляет 10 °С. Найдите относительную влажность воздуха, если давление насыщенного пара равно 1226 Па при 10 °С и 2333 Па при 20 °С.

19. Высота Солнца над горизонтом равна 36°. Под каким углом к горизонту надо расположить плоское зеркало, чтобы отраженный от него свет осветил дно глубокого колодца?

Публикацию подготовили Е.Деза, С.Жданов, М.Каменецкая, Б.Кукушкин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. с. 24)

1. На каждой из вертикалей может располагаться от 0 до 8 фигур. Описанная в условии ситуация могла возникнуть только в том случае, если на каждой из горизонталей стоит одинаковое количество фигур x, а на каждой из вертикалей количество фигур отлично от x. Приравняв количество фигур, подсчитанных Аней, количеству фигур, подсчитанных Андреем, имеем

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 8 - x = 8x,$$

откуда $x = 4$. Пример расстановки 32 фигур с соблюдением требования условия показан на рисунке 1 (фигуры обозначены крестиками).

x	x	x	x				
x	x	x	x				
x	x	x	x				
x	x	x	x				
x	x	x	x				
x	x	x		x			
x	x			x	x		
x				x	x	x	

Рис. 1

2. Пусть первые четыре числа – двойки. Получаем уравнение для пятого числа x:

$$16x = x - 1,$$

откуда $x = -\frac{1}{15}$.

3. Докажем, что $CD \parallel AF$. Проведем секущую, пересекающую отрезки CD и AF во внутренних точках (рис.2), и введем обозначения углов, показанные на рисунке.

Поскольку получившиеся после сечения пятиугольники имеют одинаковую сумму внутренних углов, то, с учетом условия задачи,

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta.$$

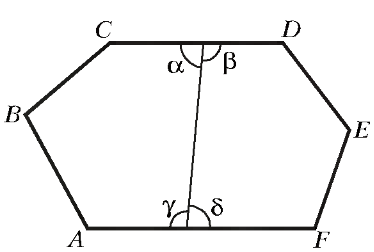


Рис. 2

С другой стороны,

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta.$$

Складывая эти равенства, после преобразований получаем $\alpha = \delta$. Следовательно, $CD \parallel AF$.

4. Прокрустик прав.

Пусть a, b, c – длины сторон исходного треугольника, причем $a < b < c$. По теореме, обратной к теореме Пифагора, треугольник с длинами сторон $a + x$, $b + x$, $c + x$ прямоугольный, если выполняется равенство

$$(a+x)^2 + (b+x)^2 = (c+x)^2.$$

Это квадратное относительно x уравнение всегда имеет вещественные решения, так как его дискриминант

$$D = 4(a+b-c)^2 - 4(a^2+b^2-c^2) = 8(c-a)(c-b) > 0.$$

Пусть x_1 – больший корень уравнения. Покажем, что величины $a + x_1$, $b + x_1$, $c + x_1$ выражают длины некоторых отрезков, т.е. являются положительными числами. Для этого достаточно убедиться в том, что $a + x_1 > 0$. Имеем

$$x_1 \geq c - a - b, \text{ откуда } a + x_1 \geq c - b > 0.$$

5. Докажем, что правдивых и лжецов среди делегатов партии умеренного прогресса поровну.

Вначале докажем, что правдивых не больше, чем лжецов. Предположим противное. Поскольку общее число делегатов четное, то количество правдивых должно превышать количество лжецов по крайней мере на 2 человека. В этом случае покидать зал заседаний могут только одни лжецы. Но, по предположению, их не больше половины, что противоречит условию.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что лжецов не больше, чем правдивых.

Следовательно, правдивых и лжецов поровну. Среди делегатов партии умеренного прогресса 50 лжецов.

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Равенство $\frac{a}{b} = a{,}b$ при $b \neq 0$ равносильно $\frac{a}{b} = a + \frac{b}{10}$, или $a = ab + \frac{b^2}{10}$. Отсюда следует, что число b^2 должно нацело делиться на 10, но это невозможно (b – отличная от нуля цифра).

Подумайте, а сопутствовала бы удача профессору Мумбуму-Плюмбуму, если бы он пытался подобрать такие две цифры a и b, что $\frac{a}{b} = b{,}a$?

2. Предположим, существует квадрат натурального числа n, записывающийся в виде $n^2 = 2\ldots225$, где количество двоек не меньше 3. Рассмотрим число

$$9n^2 = 20\ldots025 = 2\cdot 10^{k+2} + 25 = 100\cdot 2\cdot 10^k + 25,$$

где k – натуральное число и $k \geq 2$.

Число $9n^2$ является квадратом натурального числа, оканчивающегося на пятерку, поэтому его можно представить в виде

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25,$$

где a – некоторое натуральное число.

Из этих выражений получаем $2\cdot 10^k = a(a+1)$, или $2^{k+1}\cdot 5^k = a(a+1)$. Числа 2^{k+1} и 5^k, так же, как и числа a и $a+1$, взаимно простые. Следовательно, пара чисел $\{2^{k+1}, 5^k\}$ совпадает с парой чисел $\{a, a+1\}$. Но этого не может быть, поскольку при $k \geq 2$ разность между числами 5^k и 2^{k+1} больше единицы: $5^k > 4^k = 2^{2k} > 2^{k+1}$.

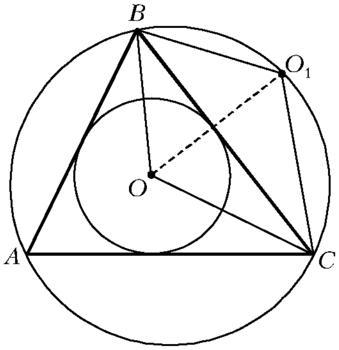


Рис. 3

Полученное противоречие свидетельствует о том, что не стоит и стараться искать квадраты среди чисел вида 2…225, где количество двоек больше 2.

3. Центр О вписанной окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника ABC (рис.3), поэтому

$$\angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) =$$

$$= 180^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}.$$

Поскольку образ O_1 точки O при ее симметричном отражении относительно стороны BC лежит на описанной окружности, то $\angle BO_1C = 180^\circ - \angle A$.

Треугольники BOC и BO_1C равны, поэтому $\angle BOC = \angle BO_1C$, или $90^\circ + \frac{\angle A}{2} = 180^\circ - \angle A$. Отсюда $\angle A = 60^\circ$.

4. Если каждая содержащаяся в восьмизначном номере цифра встречается n раз, то n, очевидно, должно быть делителем числа 8. Поэтому возможны следующие варианты:

1) в номере 8 различных цифр;
2) в номере 4 различные цифры, и каждая встречается по 2 раза;
3) в номере 2 различные цифры, и каждая встречается по 4 раза;
4) все 8 цифр номера одинаковы.

Допустим, для номера хвостового вагона имеет место 1-й вариант. Тогда среди его цифр нуль встречается не больше 1 раза. Поэтому числовое значение номера хвостового вагона не меньше 1000000, и квадрат его (равный номеру головного вагона) заведомо не может быть восьмизначным числом (а как минимум – тринадцатизначным). Поэтому для номера хвостового вагона 1-й вариант невозможен.

2-й вариант невозможен по аналогичной причине: тогда нулей не больше двух, числовое значение номера не меньше 100000, и квадрат его не менее чем одиннадцатизначное число.

4-й вариант также неприемлем. В самом деле, если все цифры номера одинаковы, то нулями они быть не могут (условие запрещает!), а если они не нули, то числовое значение номера не меньше 1000000, а квадрат не менее чем пятнадцатизначен.

Вернемся к 3-му варианту. Очевидно, среди цифр номера должны быть нули (иначе возникает та же история, что и с 4-м вариантом). Итак, 4 цифры номера – нули, а другие – нет. Нетрудно сообразить, что тогда все четыре нуля должны находиться в начале номера (в противном случае номер не меньше 10000, и квадрат его как минимум девятизначен). Следовательно, номер хвостового вагона имеет вид 0000*cccc*, где *c* – некоторая ненулевая цифра. Числовое значение этого номера (если выделить общий множитель *c*) равно $1111\times c$, а его квадрат равен $(1111\times c)^2 = 1234321\times c^2$. Остался последний штрих: проверить все возможные значения *c*. Так как *c* – ненулевая цифра, то таковых значений всего 9.

Проверка показывает, что единственный квадрат, где каждая содержащаяся цифра встречается одинаковое число раз, – это 60481729 (для $c = 7$). Поэтому номер головного вагона равен 60481729, а хвостового вагона – 00007777.

5. Покажем, что трех цветов достаточно. Для этого предъявим способ закрашивания всех треугольников, удовлетворяющий условию задачи.

Будем последовательно закрашивать треугольники одной горизонтали слева направо, перебирая горизонтали сверху вниз. Треугольники самой верхней горизонтали можно закрасить двумя цветами, чередуя их друг с другом. Цвет треугольника в любой из следующих горизонталей будем подбирать из того расчета, что он должен отличаться от цвета соседнего слева по горизонтали треугольника (если он есть) и, возможно, от цвета треугольника, соседствующего сверху с данным треугольником по вертикали. Но из трех цветов всегда можно выбрать цвет, отличающийся от двух заданных.

Калейдоскоп «Кванта»

Хотите головоломку? Пожалуйста!

1. 534460 + 534460 = 1068920.
2. $7\times 14076 = 98532$.
3. 209 + 54663 = $38\times 38\times 38$.
4. Наименьшее количество слагаемых TREE равно 139, при этом $6744\times 139 = 937416$; наибольшее количество слагаемых TREE равно 479, при этом $1599\times 479 = 765921$.
5. Наименьшее количество слагаемых FLOWER равно 13, при этом $712358\times 13 = 9260654$; наибольшее количество слагаемых FLOWER равно 58, при этом $167328\times 58 = 9705024$.
6. Наименьшее количество слагаемых MARTIN равно 12, при этом $502431\times 12 = 6029172$.
7. Наименьшее количество слагаемых «ха» равно 11182, при этом $87\times 11182 = 972834$; наибольшее количество слагаемых «ха» равно 77348, при этом $12\times 77348 = 928176$.
8. 84775 + 6551 = 91326.
9. Ребус имеет 10 решений. Вот вариант с наибольшим значением MAR = 789:

789 + 130 + 8596 + 5108 = 14623.

Цифровые ребусы

1. 35680 + 35680 + 35680 = 107040.
2. См. предыдущее решение.
3. *Указание*: ЭН = 78.
4. 15612 + 15612 + 15612 = 46836 или 32836 + 32836 + 32836 = = 98508.
5. 0,1(6) = 1 : 6.
6. $7326\times 7326 = 53670276$.
7. Семь «слов»: $13606\times 7 = 95242$.
8. а) $17^2 = 289$; б) $361 = 19^2$; в) $27^8 = 81^6$ или $32^6 = 64^5$.
9. Очевидно, С > 1. При С = 2 имеем $2^3\cdot \text{Р} < 10\text{Р} + \text{Ф}$. Если же С > 2, то $\text{С}^3\cdot \text{Р} > 10\text{Р} + \text{Ф}$.
10. $88 = \sqrt{7744}$.
11. Зашифрованы числа 21978 и 87912 (но какое из них соответствует слову ЛАЗЕР, а какое – слову РЕЗАЛ, установить невозможно).
12. $3344_6 = 44_6\times 44_6$.

13. $701568_9 + 701568_9 = 1503247_9$.

14. $\{КУС;\ СУК\} = \{153;\ 351\}$.

15. а) $56812 \times 3 = 170436$; б) $283176 \times 3 = 849528$; в) $975401 \times 4 = 3901604$; г) $246950 \times 3 = 740850$; д) $158460 \times 6 = 950760$; е) $649750 \times 3 = 1949250$.

16. а) $235193 \times 2 = 470386$ или $239153 \times 2 = 478306$; б) $15409 \times 3 = 46227$ или $31926 \times 3 = 95778$.

17. а) $289 = (9+8)^2$; б), в) $152 \times 251 = 38152$.

18. $76 \times 76 = 5776$.

19. а) $3756^2 = 14107536$; б) $7496 \times 6 = 44976$; в) $7496 \times 6 = 44976$ или $7395 \times 5 = 36975$.

20. ФЛАГ = 6821.

21. $154 \times 451 = 69454$ или $165 \times 561 = 92565$.

22. а) $128 = 2^{8-1}$; б) $625 = 5^{6-2}$.

23. а) $125 = 5^{2+1}$ или $216 = 6^{1+2}$; б) $512 = (2+1+5)^3$.

Числовая мозаика

1. Да. Например: $\dfrac{123876}{123+876} = 124$.

2. Допустим, что $\dfrac{\text{ВДОХ}}{\text{ВЫДОХ}} = \dfrac{\text{ВХОД}}{\text{ВЫХОД}}$. Тогда истинна и пропорция $\dfrac{\text{ВДОХ}}{\text{ВХОД}} = \dfrac{\text{ВЫДОХ}}{\text{ВЫХОД}}$. Вычитая по единице от обеих частей, найдем (после упрощений) $\dfrac{(\text{Д}-\text{Х})\cdot 99}{\text{ВХОД}} = \dfrac{(\text{Д}-\text{Х})\cdot 99}{\text{ВЫХОД}}$, что невозможно.

3. 19683.

4. В разности НЕТНЕТНЕТ–ДАДАДА каждая цифра встречается трижды, а потому и уменьшаемое, и вычитаемое делятся на 3.

5. $\dfrac{\text{ОСЕЛ}}{\text{ОСЛИЦА}} > \dfrac{\text{ОРЕЛ}}{\text{ОРЛИЦА}}$.

6. Пусть, например, ТЕТЯ = 2025. Если бы число ДЯДЯ было квадратом, то оно, делясь на простое число 101, делилось бы и на 101^2, а это невозможно.

7. а) Числа АД, ЛАД и КЛАД одновременно не могут быть квадратами;
б) УКЛАД = 30625 = 175^2, ЛАД = 625 = 25^2, АД = 25 = 5^2.

8. Нулем.

9. Число АРК на 13 не делится. Рассмотрим вспомогательное число КАРК = К $\times 10^3$ + АРК = КАР $\times$ 10 + К. Отсюда 999 К = КАР $\times$ 10 – АРК. Если бы оба числа КАР и АРК делились на 13, то и число 999К тоже делилось бы на 13, но этого не может быть.

10. Да, разделится: ЛУНЬ = 8316, НУЛЬ = 1386, ЛУНЬ : НУЛЬ = 6.

11. Нет, не разделится: частное может быть только единицей, но числа ТОРС и ТРОС различны.

Некоторые наблюдения над простыми числами

1. *Указание.* Достаточно доказать это утверждение для многочленов с целыми коэффициентами. Если свободный член $a_n \neq 0$ многочлена $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ не равен по модулю 1, то при $x = ka_n$ число $f(ka_n)$ – составное. Если же $|a_n| = 1$, то при достаточно большом a свободный член многочлена $f(x+a)$ будет отличен от нуля и не равен ± 1.

2. 3.

3. 7, 37, 67, 97, 127, 157.

4. *Указание.* Докажите, что разность такой прогрессии должна делиться на 2, 3, 5, 7, 11, 13, а тогда $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13 = 30030 > 30000$.

Типовые задачи вступительных экзаменов в МФТИ

1. 1) $v = \dfrac{2mv_0}{M+m}$; 2) $s = \dfrac{mv_0t}{M+m}$.

2. 1) $p_1 = p_0 + \rho gH$; 2) $p_2 = p_0 + 12\rho\omega^2R^2$.

3. 1) $A = \dfrac{\varepsilon(\varepsilon-1)\varepsilon_0 SU^2}{2d}$; 2) ток равен $I = \dfrac{(\varepsilon-1)U}{R}$ и направлен слева направо.

4. $P = \left(\dfrac{vBd}{R + \rho d/S}\right)^2 R$.

5. $x = \dfrac{(a-F_1)F_2}{F_2 - F_1 + a} \approx 6{,}7$ см, $y = \dfrac{dx}{F_2} \approx 0{,}67$ см.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 135. *Указание.* Из условия следует, что $ABCE$ – прямоугольник, а $\angle ACD = 90°$.

2. $\pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ \pi + 2\pi n,\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* При $\sin x \geq 0$ уравнение приводится к виду
$$\sin x + \cos x = -\cos 2x(1 + 2\sin 2x),$$
а при $\sin x < 0$ – к виду
$$\cos x - \sin x = -\cos 2x(1 + 2\sin 2x).$$
Первое из уравнений равносильно совокупности
$$\left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0,\\ 1 = (\sin x - \cos x)(1 + 2\sin 2x),\end{array}\right.$$
а второе равносильно совокупности
$$\left[\begin{array}{l}\cos x - \sin x = 0,\\ -1 = (\cos x + \sin x)(1 + 2\sin 2x).\end{array}\right.$$
Для решения вторых уравнений полученных совокупностей удобно выполнить замены: $t = \sin x - \cos x$ в первом случае (при этом $\sin 2x = 1 - t^2$) и $t = \sin x + \cos x$ (при этом $\sin 2x = t^2 - 1$) во втором.

3. $(-1;\,0) \cup (0;\,1) \cup (1;\,2) \cup (3;\,\infty)$.
Указание. Задачу можно решить, пользуясь стандартными методами. Мы поступим иначе. Пусть $a = \ln(x-1)^2$, $b = \ln(x+1)$. По условию,
$$\sqrt{3a^2 + b^2} > a + b. \quad (*)$$
Это неравенство справедливо, если
$$a + b \leq 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0.$$
При $a + b > 0$ имеем
$$3a^2 + b^2 > (a+b)^2,$$
что равносильно неравенству $a(a-b) > 0$.
Изобразим на координатной плоскости aOb точки, удовлетворяющие неравенству $(*)$ (рис.4).

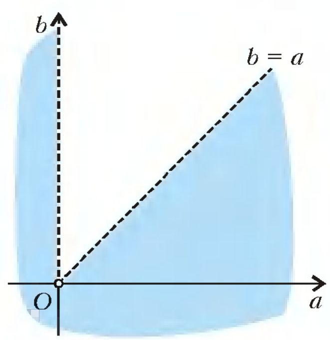


Рис. 4

Осталось решить простые системы
$$\begin{cases} b \leq 0, \\ a \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a > b, \\ b > 0. \end{cases}$$

4. а) 8π; б) 6π; в) $4\pi + 4$.
а) Первое неравенство задает объединение двух равных

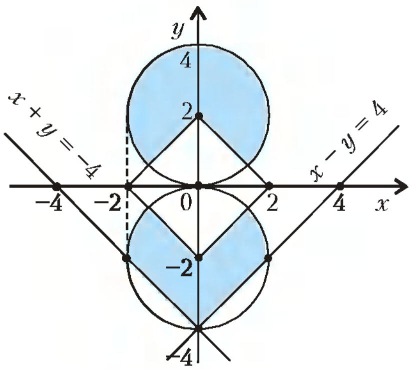


Рис. 5

кругов радиуса 2 с центрами $(0,-2)$ и $(0,2)$ (рис.5). Площадь этой фигуры $S_1 = 8\pi$.

б) Второе неравенство задает внешность квадрата с вершинами $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ (см. рис.5). Тогда определяемая первыми двумя неравенствами фигура имеет площадь $S_2 = 3S_1/4 = 6\pi$.

в) Третье неравенство можно записать в виде $(y-x+4)(y+x+4) \ge 0$. Ему соответствуют точки, лежащие в прямых вертикальных углах, определяемых прямыми $y - x + 4 = 0$ и $y + x + 4 = 0$ и содержащих ось Оy (см. рис.5). Площадь фигуры, задаваемой системой неравенств, равна $S_3 = S_2/2 + \pi + 4 = 4\pi + 4$.

5. $\left(\left(-5-\sqrt{221}\right)/49, \left(33+\sqrt{221}\right)/7\right)$ и $(2/9, 10/9)$.

Из первого уравнения получаем

$$(y-3x) + 4x\sqrt{y-3x} - 21x^2 = 0,$$

что равносильно

$$\left(\sqrt{y-3x} - 3x\right)\left(\sqrt{y-3x} + 7x\right) = 0.$$

Если $\sqrt{y-3x} = 3x$, то из второго уравнения $y = 2 - 4x$, что вместе с $y = 9x^2 + 3x$ дает $9x^2 + 7x - 2 = 0$. Отсюда $x = 2/9$, $y = 2 - 8/9 = 10/9$.

Если $\sqrt{y-3x} = -7x$, то из второго уравнения $(y+7x) - \sqrt{y+7x} - 2 = 0$, что влечет $\sqrt{y+7x} = 2$. Тогда $y = 4 - 7x = 49x^2 + 3x$, т.е. $49x^2 + 10x - 4 = 0$. Отсюда $x = \left(-5-\sqrt{221}\right)/49$ и $y = 4 - 7x = \left(33+\sqrt{221}\right)/7$.

6. $112\sqrt{2/3}$, $11\sqrt{3/2}$.

Пусть F, E, G – точки пересечения верхнего основания цилиндра с ребрами DA, DB и DC соответственно (рис.6). Тогда $EF = 8$, пирамиды $ABCD$ и $FEGD$ подобны с коэффициентом подобия 3. Окружность верхнего основания цилиндра описана вокруг треугольника FEG, а ее центр лежит в точке K – середине EF. Следовательно, $\angle EGF = \angle ACB = \pi/2$.

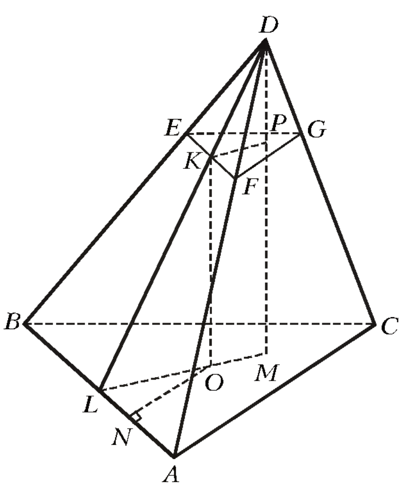


Рис. 6

Пусть a и b – катеты треугольника ABC. Тогда $24^2 = a^2 + b^2$ и $4 = ab/(24+a+b)$. Отсюда $(ab/4 - 24)^2 = 24^2 + 2ab$ и $(ab)^2/16 - 12ab = 2ab$, т.е. $ab = 16 \cdot 14$. Высота пирамиды h и двугранный угол φ между гранями ABC и ABD удовлетворяют соотношению $2h/3 = 4\operatorname{tg}\varphi = 4/\sqrt{6}$. Отсюда $h = \sqrt{6}$ и объем пирамиды

$$V = abh/6 = 16 \cdot 14\sqrt{6}/6 = 112\sqrt{2/3}.$$

Найдем радиус R сферы, описанной вокруг пирамиды $FEGD$. Проекция центра этой сферы на плоскость FEG является точкой K. Пусть d – расстояние от центра сферы до грани FEG, точка L – середина AB, точки P и M – проекции D на грани FEG и ABC соответственно, O – центр нижнего основания цилиндра, а N – его проекция на ребро AB (см. рис.6). Тогда $R^2 = d^2 + 16 = (h/3 \pm d)^2 + (KP)^2$, в этом равенстве знак плюс или минус зависит от того, выше или ниже плоскости EFG лежит центр сферы. Так как треугольники KOL и DPK подобны с коэффициентом 2, то $KP = LO/2$. По теореме Пифагора из треугольника NLO получаем $LO^2 = LN^2 + 16$. Далее, $24 - AN = b - a + AN$, т.е. $AN = 12 + (a-b)/2$, но тогда $LN = 12 - AN = (b-a)/2$. Отсюда

$$LO^2 = \frac{1}{4}\left(b^2 + a^2 - 2ab\right) + 16 = 48,$$

$$KP = \sqrt{12} \text{ и } \left(\sqrt{2/3} \pm d\right)^2 + 12 = d^2 + 16.$$

Видно, что знак минус в последнем равенстве невозможен, т.е. $d = 5/\sqrt{6}$, $R = \sqrt{25/6 + 16} = 11/\sqrt{6}$. Искомый радиус равен $3R = 11\sqrt{3/2}$.

Вариант 2

1. πk, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение приводится к виду $\cos 3x \cos 2x \cos x = 1$, откуда $|\cos x| = |\cos 2x| = |\cos 3x| = 1$.

2. $(-4; -2] \cup \left(\left(17-\sqrt{22}\right)/3; 6\right) \cup \left(15/2; 7+\sqrt{6}\right)$. *Указание.* При $x \ge 5$ получаем неравенство

$$\frac{2x - 11 - \sqrt{x^2 - 2x - 8}}{\left(\sqrt{x^2 - 2x - 8} - 4\right)(2x - 15)} < 0,$$

равносильное неравенству

$$\frac{2x - 11 - \sqrt{x^2 - 2x - 8}}{\left(x^2 - 2x - 24\right)(2x - 15)} < 0,$$

которое при $x \le \frac{11}{2}$ равносильно неравенству

$$\frac{1}{\left(x^2 - 2x - 24\right)(2x - 15)} > 0, \text{ а при } x > \frac{11}{2} \text{ – неравенству}$$

$$\frac{(2x-11)^2 - \left(x^2 - 2x - 8\right)}{(x-6)(x+4)(2x-15)} < 0.$$

Осталось применить метод интервалов. Аналогично рассматривается случай $x < 5$.

3. $\left(2 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}; -1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$. *Указание.* Из второго уравнения системы следует, что либо $y = \frac{x-1}{2}$, либо $y = 1 - x$.

4. $2\pi/3$; $2\sqrt{21}$.

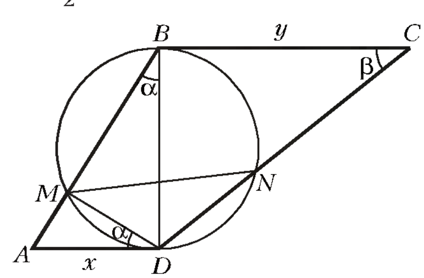


Рис. 7

Указание. Высотой трапеции и диаметром окружности является отрезок BD (рис.7). Пусть $x = AD$, $y = BC$, $\varphi = \angle MDN$, $\alpha = \angle ABD = \angle MDA$, $\beta = \angle BCD$. Угол φ тупой, так как $BC > AD$. Тогда по теореме синусов из ΔMDN находим $\sin\varphi = \sqrt{3}/2$, т.е. $\varphi = 2\pi/3$.

Далее, $x + y = 12$, $\operatorname{tg}\alpha = x/\left(2\sqrt{3}\right)$, $\operatorname{tg}\beta = 2\sqrt{3}/y$,

$\alpha+\beta+2\pi/3=\pi$. Отсюда

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\sqrt{3}=\frac{x/\left(2\sqrt{3}\right)+2\sqrt{3}/y}{1-x/y},$$

т.е.

$$6(y-x)=xy+12.$$

Окончательно находим, что

$$6(2y-12)=y(12-y)+12,$$

т.е.

$$y^2=84, \text{ и } y=2\sqrt{21}.$$

5. $\frac{121}{13}$ и $\frac{121}{50}$.

Указание. Ровно два решения получим, когда окружность $x^2+y^2=a>0$ пересекает ломаную $2|x|+3|y|+|3x+2y|=11$ только в двух точках (рис.8). Это реализуется либо при каса-

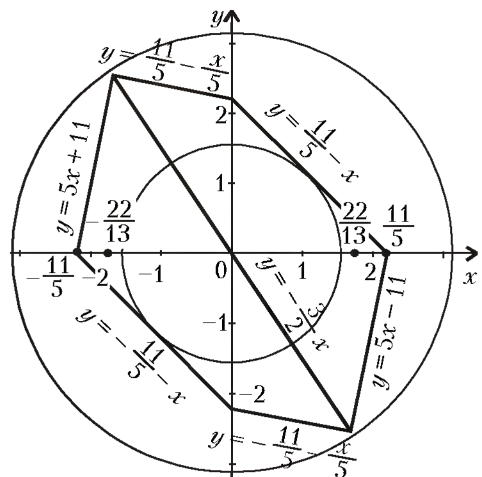


Рис. 8

нии окружности прямых $y=\pm\frac{11}{5}-x$, что соответствует $\frac{11}{5}\sqrt{2a}=\left(\frac{11}{5}\right)^2$, т.е. $a=\frac{121}{50}$, либо когда окружность проходит через точки $\pm(22/13,\,-33/13)$, что соответствует

$$a=\left(\frac{22}{13}\right)^2+\left(\frac{33}{13}\right)^2=\frac{121}{13}.$$

6. а) $\left(6\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)/3$; б) $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

а) Центр искомой сферы радиуса r лежит в плоскости AA_1CC_1 на расстоянии $h=r/\sqrt{2}$ от плоскости $ABCD$. Пусть α – угол между плоскостями $ABCD$ и B_1AD_1. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}$ и $AC=\sqrt{2}=r+(r/\sin\alpha)+(h/\operatorname{tg}\alpha)=r\left(\sqrt{3/2}+3/2\right)$. Отсюда

$$r=\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}.$$

б) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке C и осями, идущими по ребрам куба. Тогда центр искомой сферы радиуса R имеет координаты $\left(R/\sqrt{2},\,R/\sqrt{2},\,R/\sqrt{2}\right)$. Найдем его проекцию на прямую AD_1. Координаты точек прямой AD_1 $(t,1,1-t)$. Найдем такое t, чтобы векторы $\left(R/\sqrt{2}-t,\ R/\sqrt{2}-1,\ R/\sqrt{2}-1+t\right)$ и $(1,0,-1)$ были ортогональны, т.е. чтобы скалярное произведение этих векторов было равно 0. Это достигается при $t=\frac{1}{2}$. Тогда

$$R^2=\left(\frac{R}{\sqrt{2}}-1\right)^2+2\left(\frac{R}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}R^2-2\sqrt{2}R+\frac{3}{2}.$$

Отсюда

$$R^2-4\sqrt{2}R+3=0, \text{ и } R=2\sqrt{2}\pm\sqrt{5}.$$

В силу неравенства $R<AC=\sqrt{2}$ получаем $R=2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{24}+\pi n$, $\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{7\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt[3]{\frac{31}{32}}\right]$. **3.** $\frac{21}{22}$.

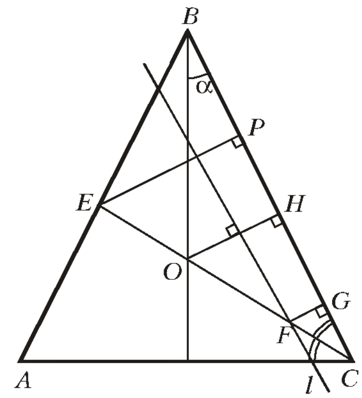


Рис. 9

Пусть – O центр вписанной в ΔABC окружности, H – проекция O на BC, G – проекция F на BC, P – проекция E на BC (рис. 9). Искомое расстояние равно $OH-FG$. Обозначим $\angle ABC=2\alpha$. Тогда

$$AB=BC=\frac{3}{\sin\alpha}$$

и

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{\sin\alpha}=\frac{3}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot 6.$$

Следовательно, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,

$$AB=BC=5,$$

$$OH=\frac{AB\,BC\sin 2\alpha}{AB+AC+BC}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}.$$

Далее,

$$FG=\frac{EP}{4}=\frac{BE\sin 2\alpha}{4}=\frac{6}{25}BE.$$

По свойству биссектрисы,

$$\frac{BE}{5}=\frac{5-BE}{6},$$

т.е.

$$BE=\frac{25}{11} \text{ и } FG=\frac{6}{11}.$$

Следовательно, искомое расстояние равно

$$OH-FG=\frac{3}{2}-\frac{6}{11}=\frac{21}{22}.$$

4. 1) $\frac{329}{30}$; 2) $\arccos\frac{5}{7}$; 3) $\frac{8\sqrt{6}}{7}$ и $\frac{3\sqrt{6}}{7}$.

Пусть $\beta=\angle C_1A_1B_1$, $\varphi=\angle A_1D_1E_1$ (рис.10). Тогда $\cos\beta=\frac{3}{5}$,

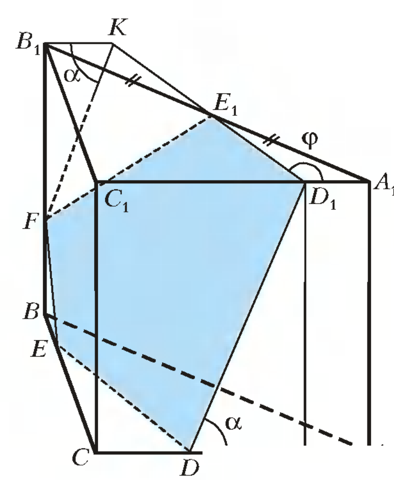


Рис. 10

$\sin\beta = \dfrac{4}{5}$. По теореме косинусов из $\Delta A_1E_1D_1$ находим, что $D_1E_1 = 2$, и по теореме синусов из $\Delta A_1E_1D_1$ получаем $\sin\varphi = 1$. Следовательно, $\varphi = \pi/2$, т.е. плоскость Π перпендикулярна грани AA_1C_1C. Тогда углом между Π и ABC является $\angle ADD_1 = \alpha$. Находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{LD} = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{5}{7}, \quad \sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

Пусть точка E на отрезке BC такова, что DE параллелен D_1E_1. Получаем, что

$$\angle D_1DE = DD_1E_1 = \frac{\pi}{2}, \quad DD_1 = \frac{LD}{\cos\alpha} = \frac{7}{2}.$$

Проведем через точку B_1 прямую, параллельную A_1C_1. Пусть K – точка пересечения этой прямой с прямой D_1E_1. Отметим на отрезке BB_1 точку F такую, что FK параллелен DD_1. Тогда $\angle B_1KF = \alpha$, а F – точка пересечения Π с отрезком BB_1. Искомое сечение – DD_1E_1FE. В силу равенства треугольников $A_1E_1D_1$ и B_1E_1K получаем

$$B_1K = \frac{3}{2}B_1F = B_1K\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{6}}{5} = \frac{3}{5}BB_1, \quad BF = \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{2}{5}BB_1.$$

Далее, $DE = AD\operatorname{tg}\beta = \dfrac{8}{3}$. После чего находим, что площадь сечения равна $\dfrac{329}{30}$.

Наконец, расстояние от A до Π равно $AD\sin\alpha = \dfrac{8}{7}\sqrt{6}$. Расстояние от A_1 до Π равно $A_1D_1\sin\alpha = \dfrac{3}{7}\sqrt{6}$.

5. $\left(-\dfrac{23}{4}; \dfrac{5}{4}\right]$. *Указание.* Уравнение вида $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ может иметь единственный корень на отрезке $[\alpha; \beta]$ в трех случаях: 1) $a = 0$; 2) $D = b^2 - 4ac = 0$, 3) $f(\alpha)f(\beta) \le 0$, причем, если $f(\alpha) = 0$ или $f(\beta) = 0$, то следует посмотреть, где находится второй корень уравнения.

6. $\left(\pm 2, \pm\dfrac{1}{2}, \pm 1\right)$, $\left(\pm 1, \mp\dfrac{1}{2}, \pm 2\right)$, $(\pm 1, \pm 1, \mp 1)$.

Если $x = 0$, то из первого уравнения $yz = 0$ и третье уравнение не выполнено. Следовательно, $x \ne 0$. Аналогично можно показать, что $y \ne 0$ и $z \ne 0$. Пусть $y = ax$, $z = bx$. Тогда первые два уравнения системы примут вид

$$\begin{cases} 2ab^2 - 4a^2 + b = 3ab, \\ 2a + 4ba^2 - b^2 = 3ab. \end{cases}$$

Вычитая из первого второе, получим

$$0 = b^2(1+2a) + b\left(1 - 4a^2\right) - 2a(1+2a) =$$

$$= (1+2a)\left(b^2 + b(1-2a) - 2a\right) = (1+2a)(b-2a)(b+1).$$

Если $a = -\dfrac{1}{2}$, то из первого уравнения системы получаем $-b^2 - 1 + b = -\dfrac{3b}{2}$, т.е. $2b^2 - 5b + 2 = 0$. Отсюда $b = 2$ либо $b = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $y = -\dfrac{x}{2}$, а $z = 2x$ либо $z = \dfrac{x}{2}$. Для $z = 2x$ из третьего уравнения системы получаем $-x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 3$, т.е.

$$x = \pm 1, \quad y = \mp\frac{1}{2}, \quad z = \pm 2 \text{ – решение.}$$

Для $z = \dfrac{x}{2}$ из третьего уравнения системы получаем $-x^2 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} = 3$, что невозможно для любого x.

Если $b = -1$, то из первого уравнения системы получаем $2a - 4a^2 - 1 = -3a$, т.е. $4a^2 - 5a + 1 = 0$. Отсюда $a = 1$ либо $a = \dfrac{1}{4}$. Следовательно, $z = -x$, а $y = x$ либо $y = \dfrac{x}{4}$. Для $y = x$ из третьего уравнения системы получаем $2x^2 - x^2 + 2x^2 = 3$, т.е.

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1, \quad z = \mp 1 \text{ – решение.}$$

Для $y = \dfrac{x}{4}$ из третьего уравнения системы получаем $\dfrac{x^2}{2} - x^2 + \dfrac{x^2}{2} = 3$, что невозможно для любого x.

Если $b = 2a$, то из первого уравнения системы получаем $8a^3 - 4a^2 + 2a = 6a^2$. Так как $a \ne 0$, то $4a^2 - 5a + 1 = 0$. Отсюда $a = 1$ либо $a = \dfrac{1}{4}$. Следовательно, $b = 2$ либо $b = \dfrac{1}{2}$.

Если $a = 1$ и $b = 2$, то $y = x$, $z = 2x$, и из третьего уравнения системы получаем $2x^2 + 2x^2 - 4x^2 = 3$, что невозможно для любого x. Если же $y = \dfrac{x}{4}$ и $b = \dfrac{x}{2}$, то из третьего уравнения системы получаем $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{4} = 3$, т.е.

$$x = \pm 2, \quad y = \pm\frac{1}{2}, \quad z = \pm 1 \text{ – решение.}$$

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Пусть тело массой m движется по тоннелю в виде хорды KL, изображенному на рисунке 11. В некоторый момент времени это тело имеет координату x. В этот момент со стороны Земли на него действует сила тяжести, равная

$$F = \frac{GmM \cdot 4\pi r^3/3}{r^2 \cdot 4\pi R^3/3} = \frac{GmMr}{R^3},$$

где M – масса Земли, R – радиус Земли, а r – радиус окружности, проходящей через тело массой m. Проекция этой силы на ось x равна

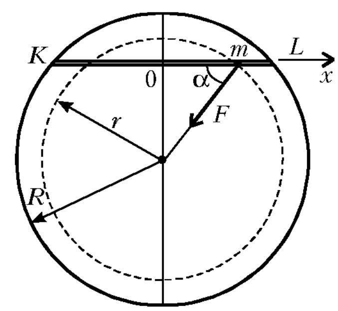


Рис. 11

$$F_x = F\cos\alpha = F\frac{x}{r} = \frac{GmMx}{R^3} = mg\frac{x}{R},$$

где g – ускорение свободного падения на поверхности Земли. Теперь мы можем записать уравнение движения нашего тела:

$$mx'' = -mg\frac{x}{R},$$

или

$$x'' + \frac{g}{R}x = 0.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{g/R}$. Следовательно, наш вагон достигнет Калининградской области через время, равное половине периода колебаний ($T = 2\pi/\omega$):

$$\Delta t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42 \text{ мин}.$$

Для ответа на второй вопрос будем искать решение уравнения гармонических колебаний в виде

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t,$$

где A и B – константы. Используя начальные условия: $x(0) = l/2$ и $x'(0) = 0$, найдем: $B = l/2$ и $A = 0$. Окончательно получим

$$x(t) = \frac{l}{2}\cos\omega t.$$

Скорость вагона будет изменяться со временем по закону

$$v(t) = x'(t) = -\frac{l\omega}{2}\sin\omega t .$$

Отсюда находим абсолютную величину максимальной скорости вагона:

$$v_m = x'_m = \frac{l\omega}{2} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{g}{R}} \approx 600 \text{ м/с} .$$

2. При открытой пробирке общее давление воздуха и пара в любом сечении пробирки равно атмосферному давлению p_0. Следовательно, парциальное давление воздуха в пробирке так же, как и давление пара, изменяется с высотой по линейному закону: оно равно $p_0 - p_{\text{н}}$ у поверхности воды и $p_0 - p_{\text{н}}/2$ у открытого конца пробирки (здесь $p_{\text{н}}$ – искомое давление насыщенного пара). Очевидно, что среднее (по высоте) давление воздуха будет равно

$$p_{\text{ср}} = p_0 - \frac{3}{4}p_{\text{н}} .$$

Массу воздуха в пробирке найдем из уравнения состояния идеального газа:

$$m_{\text{в}} = \frac{M_{\text{в}}p_{\text{ср}}V}{RT} ,$$

где V – объем влажного воздуха в пробирке. После того как пробирку закроют, воздух равномерно распределится по высоте, но его общая масса сохранится, а пар во всем объеме будет насыщенным.

Установившаяся плотность влажного воздуха равна сумме плотностей воздуха и насыщенного пара:

$$\rho_{\text{вв}} = \rho_{\text{в}} + \rho_{\text{н}} .$$

Поскольку

$$\rho_{\text{в}} = \frac{m_{\text{в}}}{V} = \frac{M_{\text{в}}p_{\text{ср}}}{RT} \text{ и } \rho_{\text{н}} = \frac{M_{\text{воды}}p_{\text{н}}}{RT} ,$$

плотность влажного воздуха равна

$$\rho_{\text{вв}} = \frac{M_{\text{в}}p_{\text{ср}} + M_{\text{воды}}p_{\text{н}}}{RT} = \frac{M_{\text{в}}\left(p_0 - 3/4\,p_{\text{н}}\right) + M_{\text{воды}}p_{\text{н}}}{RT} .$$

Плотность сухого атмосферного воздуха составляет

$$\rho_{\text{св}} = \frac{M_{\text{в}}p_0}{RT} .$$

Разность этих плотностей равна

$$\Delta\rho = \rho_{\text{св}} - \rho_{\text{вв}} = \frac{\left(3/4\,M_{\text{в}} - M_{\text{воды}}\right)p_{\text{н}}}{RT} .$$

Отсюда находим давление насыщенного пара:

$$p_{\text{н}} = \frac{4\Delta\rho RT}{3M_{\text{в}} - 4M_{\text{воды}}} = 3{,}32\cdot 10^3 \text{ Па} .$$

3. До замыкания ключа суммарный заряд левых пластин обоих конденсаторов равен нулю. После замыкания ключа и установления равновесия заряд левой пластины конденсатора емкостью C_1 равен

$$q_1 = C_1\left(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1\right) = C\left(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1\right) ,$$

а заряд левой пластины конденсатора емкостью C_2 равен

$$q_2 = C_2\mathcal{E}_2 = C\mathcal{E}_2 .$$

Суммарный заряд этих пластин, а следовательно, и заряд, протекший через батарею с ЭДС $\mathcal{E}_2$, равен

$$q = q_1 + q_2 = C\left(2\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1\right) .$$

Теперь перейдем ко второму вопросу. Работа батареи с ЭДС $\mathcal{E}_2$ равна

$$A_2 = q\mathcal{E}_2 = C\mathcal{E}_2\left(2\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1\right) .$$

Найдем работу, совершенную батареей с ЭДС $\mathcal{E}_1$. До замыкания ключа заряд правой пластины конденсатора емкостью C_1 равен

$$q'_1 = \frac{C_1C_2\mathcal{E}_1}{C_1 + C_2} = \frac{C\mathcal{E}_1}{2} .$$

После замыкания ключа заряд на этой пластине составляет

$$q''_1 = C\left(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2\right) .$$

Следовательно, через батарею с ЭДС $\mathcal{E}_1$ протек заряд

$$\Delta q = q''_1 - q'_1 = C\left(\frac{\mathcal{E}_1}{2} - \mathcal{E}_2\right)$$

и эта батарея совершила работу

$$A_1 = \Delta q\mathcal{E}_1 = C\mathcal{E}_1\left(\frac{\mathcal{E}_1}{2} - \mathcal{E}_2\right) .$$

Начальная энергия, запасенная в конденсаторах (до замыкания ключа), равна

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}_1^2 = \frac{C\mathcal{E}_1^2}{4} .$$

Конечная энергия этих конденсаторов (после замыкания ключа) составляет

$$W_2 = \frac{C_1\left(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2\right)^2}{2} + \frac{C_2\mathcal{E}_2^2}{2} = \frac{C}{2}\left(\mathcal{E}_1^2 - 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_2^2\right).$$

По закону сохранения энергии можно записать, что суммарная работа батарей пошла на изменение энергии конденсаторов и на выделение искомого количества теплоты:

$$A = \Delta W + Q .$$

Отсюда находим

$$Q = A_1 + A_2 + W_1 - W_2 =$$

$$= C\frac{\mathcal{E}_1^2}{2} - C\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + 2C\mathcal{E}_2^2 - C\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + \frac{C}{4}\mathcal{E}_1^2 - \frac{C}{2}\mathcal{E}_1^2 + C\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - C\mathcal{E}_2^2 =$$

$$= \frac{C}{4}\left(\mathcal{E}_1 - 2\mathcal{E}_2\right)^2 .$$

4. Пересечение перемычками линий магнитного поля приводит к появлению в них ЭДС индукции. Численно эти ЭДС равны магнитным потокам, которые пронизывают площади, заметаемые стержнями за единицу времени:

$$\mathcal{E}_{i1} = \frac{\omega_1 a^2 B}{2} ,\quad \mathcal{E}_{i2} = \frac{\omega_2 a^2 B}{2} .$$

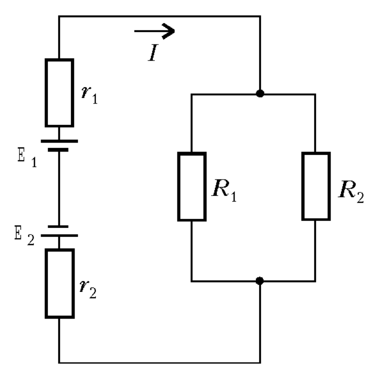


Рис. 12

Каждая из перемычек будет эквивалентна батарее с ЭДС, равной ЭДС индукции, и внутренним сопротивлением, равным омическому сопротивлению перемычки. Эквивалентная электрическая схема будет иметь вид, изображенный на рисунке 12. Здесь r_1 и r_2 – сопротивления перемычек:

$$r_1 = r_2 = \rho a ,$$

а R_1 и R_2 – сопротивления двух частей проволочного кольца, заключенных между перемычками:

$$R_1 = \frac{\pi\rho a}{2} ,\quad R_2 = \frac{3\pi\rho a}{2} .$$

Согласно закону Ома,

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I\left(r_1 + r_2\right) + I\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} .$$

Отсюда находим ток через перемычки:

$$I = \frac{8(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}{(16+3\pi)\rho a} = \frac{4aB(\omega_1 - \omega_2)}{(16+3\pi)\rho}.$$

5. Пусть пучок света проходит на расстоянии x от верхнего основания призмы (рис. 13). Диаметр пучка обозначим через dx. Поскольку пучок проходит через призму без преломления, его волновые фронты (плоскости постоянной фазы) на входе и на выходе призмы параллельны друг другу. Волновой фронт входного пучка перпендикулярен направлению распространения пучка и, естественно, параллелен грани призмы AA'. Этой же грани будет параллелен волновой фронт и выходного пучка. Пересечение этого волнового фронта с плоскостью рисунка изображено в виде линии cf. Такое положение волнового фронта означает, что оптические пути ac и kf должны быть равны. Оптический путь ac включает в себя два участка ab и bc:

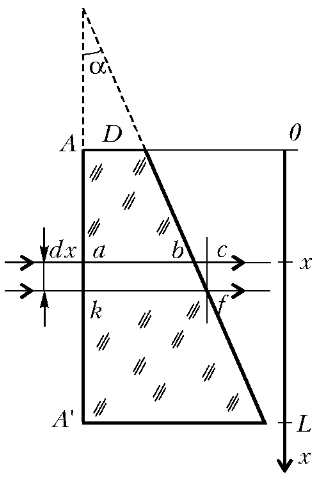


Рис. 13

$$\Delta_{ac} = \Delta_{ab} + \Delta_{bc} = (D + x\,\mathrm{tg}\,\alpha)\cdot n(x) + dx\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Оптический путь kf равен

$$\Delta_{kf} = \big(D + (x+dx)\,\mathrm{tg}\,\alpha\big)\cdot n(x+dx).$$

Приравняем оптические пути:

$$(D + x\,\mathrm{tg}\,\alpha)\cdot 1{,}4\big(1 - x/(7L)\big) + dx\,\mathrm{tg}\,\alpha =$$

$$= \big(D + (x+dx)\,\mathrm{tg}\,\alpha\big)\cdot 1{,}4\big(1 - (x+dx)/(7L)\big)$$

и, пренебрегая малым членом $\frac{1{,}4\,\mathrm{tg}\,\alpha}{7L}(dx)^2$ (по отношению к другим членам), найдем расстояние пучка от верхнего основания призмы:

$$x = L - \frac{D}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} \approx L - \frac{D}{2\alpha} = 9 \text{ см}.$$

Вариант 2

1. $t_1 = \frac{v_0}{\mu g}$; $t_2 = \frac{25}{8}\frac{v_0}{\mu g}$. **2.** $a_m = \sqrt{3}g$; $E_к = 8U_0/3$.

3. $U_1 = Q/5$.

4. $\mathcal{E} = I_0\sqrt{\frac{6dL}{\varepsilon_0 S}}$; $q_1 = -\frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E}$, $q_2 = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E}$, $q_3 = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E}$, $q_4 = -\frac{1}{3}\frac{\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E}$.

5. $l = \frac{nRF}{R-(n-1)F} = 47{,}5$ см.

Московский государственный институт электроники и математики

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $[-2;-1)\cup[2;\infty)$. **2.** $\left\{-\frac{1}{3};1\right\}$. **3.** $(2;3]$.

4. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{8}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $28{,}5\pi$.

5. 4. **6.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$.

7. $(-\infty;0]\cup\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\infty\right)$. *Указание.* $y = a(x+6)$ – семейство прямых, пересекающих график функции $\frac{2|x+4|-8}{x}$.

Вариант 2

1. $(-\infty;0]\cup\left[\frac{3}{2};3\right)$. **2.** $\left\{\log_4 3;\log_4\frac{3}{13}\right\}$.

3. $\mathrm{arctg}\,3+\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **4.** $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

5. $-\frac{1}{7}$; 1. *Указание.* Функция задает семейство верхних полуокружностей с центром $C(3a;0)$ и радиусом $R = 2|a|$. Касательная пересекает Ox в точке $A(-1;0)$ и $AC\sin 30^\circ = R$.

6. $\frac{a^3}{12}$.

7. $\left[-\frac{11}{3};7\right]$. *Указание.* Пусть $t = \sin x + \cos x$, тогда $\sin 2x = t^2 - 1$. Находим множество значений трехчлена $3t^2 + 2\sqrt{2}t - 3$ при $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

ФИЗИКА

Вариант 1

2. $v_0 = \sqrt{v^2+2gh} = 20$ м/с.

3. $\eta = 1 - T_1/T_2 \approx 0{,}49 = 49\%$.

4. $I = 4U/(3R) = 1$ мА.

5. $v = s/(2t) = 30$ м/с.

Вариант 2

2. $v_{\min} = \sqrt{2gh} \approx 22$ м/с.

3. $I = 9U/(20R) = 0{,}9$ мА.

4. $Q = \left(\sqrt{W_2}-\sqrt{W_1}\right)^2/2 = 1{,}25$ мДж.

5. $F = 3\rho_в gLS/4 = 0{,}28$ Н.

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\frac{2\pi n}{37}$, $\frac{2\pi k}{19}$, $n,k\in\boldsymbol{Z}$.

Замечание. Полученные серии корней уравнения пересекаются. Если мы хотим записать ответ в виде непересекающихся серий, на один из параметров n или k следует наложить ограничение. Например, $k \ne 19m$. Впрочем, от поступающих этого не требовалось.

2. $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$.

3. 24.
Указание. Пусть x – одна из сторон прямоугольника. Выразите его площадь через x и найдите наибольшее значение этой функции.

4. 3. *Указание.* Пусть K – середина BC, L – середина MN. Найдите катеты треугольника AKL, а затем его высоту.

5. (4; 2).

Вариант 2

1. $\frac{(2n+1)\pi}{33}$, $\frac{(2k+1)\pi}{15}$, $n,k \in \boldsymbol{Z}$ (см. замечание к задаче 1 первого варианта).

2. $(-\infty; -67] \cup [-7; -3) \cup (-3; 1] \cup [61; +\infty)$.

3. 30. *Указание.* Пусть α – угол при основании трапеции. Выразите площадь трапеции через α и найдите наибольшее значение этой функции.

4. $\frac{a^2\sqrt{3}}{27\cos\alpha}$. *Указание.* Сечение гомотетично той боковой грани, которой оно параллельно. Найдите коэффициент гомотетии.

5. (1; –2).

Вариант 3

1. 2; 3. **2.** $(-\infty; 6)$.

3. $-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{9}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (см. замечание к задаче 1 первого варианта).

4. $y = -3{,}5x - 1$. **5.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

Вариант 4

1. 768. *Указание.* Равенство боковых ребер пирамиды означает, что основанием ее высоты является центр окружности, описанной около основания.

2. $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup (3; 4]$; 4. **4.** 2.

5. Функция $y(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

Вариант 5

1. 0. **2.** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 1.

3. $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. $4\sqrt{3}$. *Указание.* Выразите высоту и объем тетраэдра через его ребро.

5. $-3\sqrt{2}$. Этот единственный минимум есть $y(0)$.

Задачи устного экзамена

1. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. $\varnothing$. *Указание.* Замените $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ на $\cos\frac{\pi}{6}$ и сравните коэффициент при $\cos 2x$ с $\cos\frac{\pi}{6}$.

3. $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup \left[0; \frac{1}{3}\right]$. *Указание.* Неравенство $f\sqrt{g} \le f$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f = 0, \\ g \ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f > 0, \\ 0 \le g \le 1, \end{cases} \quad \begin{cases} f < 0, \\ g \ge 1. \end{cases}$$

4. [–9; –1). *Указание.* Рассмотрите случаи $0 < x^2 < 1$ и $x^2 > 1$.

5. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. *Указание.* Данное неравенство равносильно неравенству $|x-1|-1 < |5x+2|$.

6. 0. *Указание.* Множество решений системы является отрезком. Это множество симметрично относительно середины отрезка, а координата середины отрезка равна полусумме координат его концов.

7. $\frac{4}{3}$. *Указание.* Воспользуйтесь формулами Виета и не забудьте проверить, имеет ли уравнение при найденном значении q два корня.

8. 26.

9. 0. *Указание.* Убедитесь в том, что при указанных значениях x данное выражение определено.

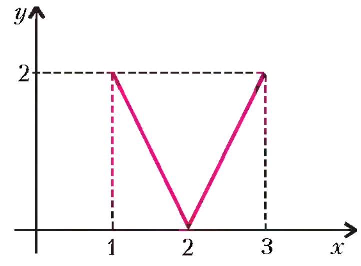


Рис. 14

10. Оба равны 1.

11. $\sqrt{3}$. *Указание. Первый способ.* Распишите $\cos 40^\circ$ как $\cos(60^\circ - 20^\circ)$. *Второй способ.* Запишите в виде произведения сначала $\cos 40^\circ - \cos 20^\circ$, а затем – получившееся выражение.

12. См. рис. 14.

Указание. Так как $\sin \arcsin t \equiv t$, $\cos \arccos t \equiv t$ при $-1 \le t \le 1$, то при $1 \le x \le 3$ имеем $y = 2|2-x|$.

13. (0; 3), (0,3; 0). *Указание.* Сначала получите уравнение касательной.

14. Построение см. на рисунке 15; $\frac{3}{\sqrt{17}}a$.

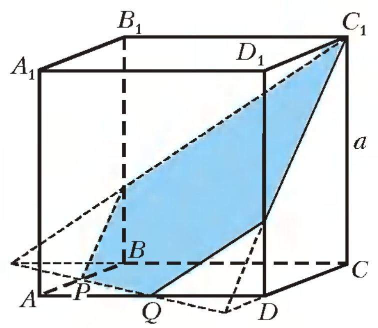


Рис. 15

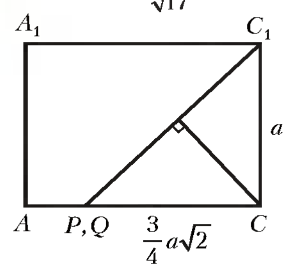


Рис. 16

Указание. Сначала постройте точки пересечения прямой PQ с плоскостями боковых граней. Для вычисления расстояния рассмотрите сечение ACC_1A_1 (рис. 16).

15. 4,8. *Указание.* Рассмотрите высоту данного треугольника – она и будет общей хордой.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. б). **2.** б). **3.** в). **4.** б). **5.** в). **6.** а). **7.** б). **8.** б). **9.** б). **10.** б). **11.** в). **12.** а). **13.** б). **14.** в). **15.** а). **16.** а). **17.** $q_3 = -4 \cdot 10^{-9}$ Кл, $x = -12$ см. **18.** Нейтрон. **19.** $n = \sqrt{3} \approx 1{,}7$.

Вариант 2

1. а). **2.** б). **3.** б). **4.** в). **5.** а). **6.** в). **7.** а). **8.** а). **9.** б). **10.** а). **11.** а). **12.** в). **13.** в). **14.** а). **15.** б). **16.** а). **17.** $q = +1{,}96 \cdot 10^{-13}$ Кл. **18.** $\varphi \approx 53\%$. **19.** $\varphi = 63^\circ$.

НАПЕЧАТАНО В 2003 ГОДУ

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Курьер образования
www.courier.com.ru

Vivos Voco!
vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Ю.А.Ващенко, Д.Н.Гришукова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №